Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Es sei (G, u, b, c) eine Instanz des MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEMS mit ganzzahligen Kosten c. Außerdem sei f eine optimale Lösung und $e_0 \in E(G)$. Die Kostenfunktion $c' : E(G) \to \mathbb{Z}$ sei wie folgt definiert: $c'(e_0) = c(e_0) + 1$ und $c'(e) = c(e)$ für $e \in E(G) \setminus \{e_0\}$. Zeigen Sie, wie man zu gegebenem (G, u, b, c'), e_0 und f in Zeit $O(|E(G)| + |V(G)|^3)$ einen kostenminimalen Fluss in (G, u, b, c') finden kann. (5 Punkte)

2. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta(v)} f(e) \le b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e\in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein MINIMUM-COST-FLOW-PROBLEM lösen kann.

   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+2 Punkte)

3. Betrachten Sie das folgende Problem: Gegeben sei ein stark zusammenhängender gerichteter Graph G mit nichtnegativen reellen Kantengewichten c. Gesucht ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass der Graph, der $f(e)$ Kopien von jedem $e \in E(G)$ und $V(G)$ als Knotenmenge enthält, Eulersch ist. Dabei soll $\sum_{e\in E(G)} c(e)f(e)$ minimiert werden. Man gebe einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem an. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 14.1.2020, **vor** der Vorlesung.