Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
5. Übung

1. Sei T ein kostenminimaler aufspannender Baum für einen ungerichteten Graphen G mit nichtnegativen Kantengewichten. G' entstehe aus G, indem ein neuer Knoten s hinzugefügt wird, der mit jedem Knoten aus $V(G)$ durch eine (ebenfalls gewichtete) Kante verbunden ist. Zeigen Sie, wie man aus T und G' in linearer Laufzeit einen kostenminimalen aufspannenden Baum für G' berechnen kann. (5 Punkte)

2. Zeigen Sie, wie man in einem gegebenen gerichteten Graphen ein Branching mit maximaler Kardinalität in linearer Laufzeit finden kann. (4 Punkte)

3. Betrachten Sie folgenden Algorithmus, um in einem gegebenen gerichteten Graphen G mit Gewichten $l : E(G) \to \mathbb{R}_+$ zu einem Knoten $r \in V(G)$, von dem aus jeder Knoten in G erreichbar ist, eine aufspannende Arboreszenz T mit Wurzel r und minimalem Gewicht $\sum_{e \in E(T)} l(e)$ zu bestimmen: Es sei $G_0 := (V(G), \{e \in E(G) \mid l(e) = 0\})$. Wenn G_0 eine aufspannende Arboreszenz mit Wurzel r enthält, gibt man eine solche zurück. Andernfalls wählt man eine starke Zusammenhangskomponente K von G_0 mit $r \notin V(K)$ und $l(e) > 0$ für alle $e \in \delta_G^-(V(K))$. Überlegen Sie sich, warum eine solche existiert. Es sei $\alpha := \min\{l(e) \mid e \in \delta_G^-(V(K))\}$. Setze nun $l'(e) := l(e) - \alpha$ für $e \in \delta_G^-(V(K))$ und $l'(e) := l(e)$ für $e \in E(G) \setminus \delta_G^-(V(K))$. Dann berechnet man rekursiv eine kostenminimale aufspannende Arboreszenz T mit Wurzel r bezüglich l'. Zeigen Sie, dass T so gewählt werden kann, dass $|\delta_T^-(V(K))| = 1$ gilt. Diese Arboreszenz T gibt man dann zurück.

   Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt funktioniert. (6 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 12.11.2019, **vor** der Vorlesung.