Wintersemester 2014/15
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Es sei G ein bipartiter Graph und $w : E(G) \to \mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie, dass dann der minimale Wert $\sum_{v \in V(G)} y(v)$ unter allen Abbildungen $y : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ mit $y_u + y_v \geq w(\{u, v\})$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E(G)$ gleich dem maximalen Gewicht eines Matchings in G ist. (5 Punkte)

2. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in [0, 1]^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für $j = 1, \ldots, n$ und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt *doppeltstochastisch*. Eine doppeltstochastische Matrix, deren Einträge alle 0 oder 1 sind, heißt *Permutationsmatrix*. Beweisen Sie:

   (a) Die *Permanente* $\mathrm{per}(A) := \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$ (die Summe erstreckt sich über alle Permutationen) jeder doppeltstochastischen Matrix ist positiv.

   (b) Jede doppeltstochastische Matrix ist Konvexkombination von Permutationsmatrizen. (3+3 Punkte)

3. Beschreiben Sie eine Turingmaschine auf dem Alphabet $\{0, 1\}$, die eine natürliche Zahl x mit 3 multipliziert. Die Eingabe bestehe aus einer binären Kodierung von x, und nach der Berechnung soll auf dem Band nur eine Zeichenkette stehen, die $3x$ binär kodiert (bei der binären Darstellung von natürlichen Zahlen sollen dabei keine führenden Nullen auftreten). (5 Punkte)

4. Turingmaschinen können selbst auch durch binäre Strings kodiert werden. Betrachten Sie das Halteproblem: Gegeben seien zwei binäre Strings x und y, wobei x eine Turingmaschine Φ kodiert. Es soll entschieden werden, ob $\mathrm{time}(\Phi, y) < \infty$ gilt.
   Zeigen Sie, dass dieses Problem unentscheidbar ist, dass es also keinen Algorithmus für das Halteproblem gibt. (4 Punkte)
   Hinweis: Nehmen Sie an, dass es einen solchen Algorithmus A gibt. Dann konstruiere man eine Turingmaschine, die für den Input x zunächst A auf den Input (x, x) anwendet und genau dann terminiert, wenn $\mathrm{output}(A, (x, x)) = 0$.

Abgabe: Donnerstag, den 15.1.2015, vor der Vorlesung.