Wintersemester 2009/10 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
7. Übung

1. Sei G ein Graph mit Kantenlängen $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und $s, t \in V$. Wir wollen einen kürzesten s–t–Weg finden, indem wir Dijkstras Algorithmus von beiden Knoten s und t aus starten. Wir stoppen, sobald ein Knoten $v \in V$ aus *beiden* Priority Queues entfernt wurde.

   a) Geben Sie ein Beispiel an, in dem dann $v.\text{Abstand}_s + v.\text{Abstand}_t > \text{dist}(s, t)$ gilt.

   b) Wie findet man mit dieser Abbruchbedingung dennoch einen kürzesten s–t–Weg? (4 Punkte)

2. Zeigen Sie, wie man mit dem Floyd-Warshall-Algorithmus in einem gerichteten Graphen mit n Knoten und konservativen Kantengewichten einen kürzesten Kreis in Zeit $O(n^3)$ finden kann. (4 Punkte)

3. Sei G ein kreisfreier gerichteter Graph mit n Knoten. Entfernt man aus G nacheinander alle Kanten (v, w), für die es einen v-w-Weg gibt, der aus mehr als einer Kante besteht, so nennt man das Ergebnis die transitive Reduktion von G. Wie kann man in Zeit $O(n^3)$ die transitive Reduktion eines kreisfreien Graphen berechnen? (4 Punkte)
   Hinweis: Modifizieren Sie den Floyd-Warshall-Algorithmus.

4. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints") eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine wichtige Aufgabe des VLSI-Chip-Designs (VLSI bedeutet „very large scale integrated") ist es, einen optimalen Clock-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. T ist die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEM.

   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.

   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen würde. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 1.12.2009, **vor** der Vorlesung.