Wintersemester 2008/09 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner
C. Mohr

Algorithmische Mathematik I

5. Übung

1. **Dreitermrekursion**
   Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$
   $$I_n := \int_0^1 (1-x)^n \sin(x) dx.$$
   (a) Berechnen Sie I_0. Zeigen Sie, dass $I_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert.
   (b) Leiten Sie eine Dreitermrekursion für die Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ her.
   (c) Bestimmen Sie näherungsweise I_2, I_4 und I_6 mit Hilfe der in (b) ermittelten Rekursionsvorschrift. Führen Sie dabei alle Rechnungen in 3-stelliger Artihmetik aus (siehe Übung 2 Aufgabe 3). Erklären Sie die Ergebnisse.
   (d) Wenden Sie die Rekursion rückwärts an, um I_0 zu bestimmen. Verwenden Sie dabei die Näherung $I_{10} \approx 0$ und führen Sie die Rechnungen wieder in 3-stelliger Artihmetik aus. Erklären Sie die Ergebnisse. (8 Punkte)

2. **Orthogonalpolynome und Dreitermrekursion**
   Es sei für Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ das Integral
   $$\langle f, g\rangle := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx$$
   mit Gewichtsfunktion $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}^+$, und $a < b$ gegeben. Weiterhin sei
   $$\Pi_k = \left\{\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0\right\}$$
   der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich k mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

   Die Elemente einer Folge von Polynomen $\{P_k\}_k$ vom exakten Grad k (d.h. $P_k \in \Pi_k$ und $\alpha_k \neq 0$) heißen Orthonormalpolynome über $[a,b]$ bezüglich der Gewichtsfunktion ω, falls gilt
   $$\langle P_i, P_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Dann kann man für jedes $p \in \Pi_k$ eindeutige Koeffizienten $\gamma_j \in \mathbb{R}$ finden, so dass $p = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j P_j$.

Zeigen Sie:

Die Folge von Orthonormalpolynomen $\{P_k\}$ erfüllt die Dreitermrekursion

$$\alpha_{n+1}\, P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\, P_n(x) - \alpha_n\, P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\alpha_n = \langle x\, P_{n-1}, P_n\rangle, \quad \beta_n = \langle x\, P_n, P_n\rangle$$

mit den Startwerten $P_{-1} = 0$, $P_0 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \omega(x)\, dx}}$. (11 Punkte)

3. **Fibonacci-Zahlen**

Betrachten Sie die Folge der Fibonacci-Zahlen

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für $n \geq 1$.

(b) $F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n$ für $k \geq 1$, $n \geq 0$.

(c) $F_{k \cdot n}$ ist ein Vielfaches von F_n für $k \geq 1$.

(d) $\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggT}(m,n)}$ für $m, n \geq 1$.
Tipp: Sie dürfen dabei verwenden, dass (b) auch für nicht positive Indizes k und n gilt. Dabei sind Fibonacci-Zahlen zu negativen Indizes $-n$ ($n \in \mathbb{N}$) definiert durch $F_{-n} := (-1)^{n-1} F_n$.

(e) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $c \in \mathbb{R}$, für die $F_n \leq c^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(11 Punkte)

4. **Erweiterter Euklidischer Algorithmus**

(a) Gegeben seien zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Teilt eine natürliche Zahl d sowohl a als auch b und gilt $d = a \cdot x + b \cdot y$ für $x, y \in \mathbb{Z}$, dann gilt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.

(b) Schreiben Sie ein `C++`-Programm, das für $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a \geq b \geq 0$ den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ sowie x und y aus Aufgabenteil (a) bestimmt.
Tipp: Betrachten und erweitern Sie den Euklidischen Algorithmus (Algorithmus 4.7 der Vorlesung).

(c) Beweisen Sie, dass das von Ihnen implementierte Programm tatsächlich die gesuchten Zahlen x und y bestimmt. (10 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 19.11.2008, **vor** der Vorlesung.