Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 18. November, vor der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 21:
Gegeben seien

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie jeweils für $i = 1, 2$, ob b_i als nicht-negative Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren aus A dargestellt werden kann.
Verwenden Sie dazu den Algorithmus aus dem Beweis für Satz 2.17.

(10 Punkte)

Aufgabe 22:
Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
Zeigen Sie, dass

$$M = \operatorname{conv}(a_1, \dots, a_r) + \operatorname{cone}(b_1, \dots, b_s)$$

für geeignete $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R}^n$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Ax \leq \lambda b,\ \lambda \geq 0 \right\}$.

(7 Punkte)

Aufgabe 23:
Gegeben sei das folgende lineare Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad (P_1)$$

a) Bringen Sie das System (P_1) auf die Form $Ax = b$, $x \geq 0$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 3.7 alle Ecken von (P_1).

c) Welche der Ecken sind entartet, bzw. nicht entartet. Warum sind sie entartet, bzw. nicht entartet?

d) Bestimmen Sie zu allen Ecken jeweils alle möglichen Basen.

(10 Punkte)

Aufgabe 24: Gegeben sei das folgende lineare Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +x_2 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & +2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{P_2}$$

a) Bringen Sie das System (P_2) durch Einführen von Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 auf die Form $Ax = b,\ x \geq 0$.

b) Bestimmen Sie die Ecke $\bar{x}$, deren Basisindexmenge $\{1, 2, 3\}$ ist.

c) Bestimmen Sie alle Basen für $\bar{x}$.

d) Skizzieren Sie den für (P_2) zulässigen Bereich und interpretieren Sie das Ergebnis von c) geometrisch.

(10 Punkte)