Facetten

Theorem

Es sei $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ ein nicht-leeres Polyeder der Dimension $n - \operatorname{rank}(A)$. Es sei $A'x \leq b'$ ein kleinstes Ungleichungssystem, sodass $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A'x \leq b'\}$. Dann ist jede Ungleichung in $A'x \leq b'$ facettenbestimmend für P und jede Facette von P wird durch eine Ungleichung von $A'x \leq b'$ gegeben.

Korollar

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder.

(a) Jede Fläche F von P mit $F \neq P$ ist der Schnitt von Facetten von P.

(b) Die Dimension jeder Facette von P ist $\dim(P) - 1$. $\square$

Proposition

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist die Menge

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A\binom{x}{y} \leq b\}$$

ein Polyeder.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Notation:

Die Menge $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A\binom{x}{y} \leq b\}$ heißt **Projektion** von $\{z \in \mathbb{R}^{n+k} \mid Az \leq b\}$ auf $\mathbb{R}^n$.

Bilder von affin linearen Abbildungen

Korollar

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D \in \mathbb{R}^{k\times n}$ und $d \in \mathbb{R}^k$. Dann ist

$$\{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \text{ und } y = Dx + d\}$$

ein Polyeder.

Beweis: Es gilt:

$$\left\{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \text{ und } y = Dx + d\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -I_k \\ -D & I_k \end{pmatrix} \binom{x}{y} \leq \begin{pmatrix} b \\ -d \\ d \end{pmatrix}\right\}$$

Die Aussage folgt damit aus der vorigen Proposition. $\square$

Minimale Flächen

Proposition

Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $x' \in P$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) x' ist eine Ecke von P.

(b) Es gibt ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$ aus n Ungleichungen, sodass die Zeilen von A' linear unabhängig sind und $\{x'\} = \{x \in P \mid A'x = b'\}$ gilt.

(c) x' kann nicht als Konvexkombination von Vektoren in $P \setminus \{x'\}$ geschrieben werden.

(d) Es gibt keinen vom Nullvektor verschiedenen Vector $d \in \mathbb{R}^n$, für den $\{x' + d, x' - d\} \subseteq P$ gilt.

Theorem (Carathéodorys Theorem)

Wenn $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von Vektoren und $c \in \text{cone}(X)$ ist, dann gibt es linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_k \in X$, sodass $c \in \text{cone}(\{a_1, \ldots, a_k\})$.

Beweis: Sei $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq X$ minimal mit $c \in \text{cone}(\{a_1, \ldots, a_k\})$.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 : c = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$.

Annahme: Die Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ sind nicht linear unabhängig.

$\Rightarrow$ Es gibt Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ mit $\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i a_i = 0$.

O.B.d.A.: Wenigstens ein γ_i ist positiv.

Sei σ maximal, sodass $\lambda_i - \sigma\gamma_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

$\Rightarrow$ Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\lambda_i - \sigma\gamma_i = 0$.

$\Rightarrow c = \sum\limits_{i=1}^{k} (\lambda_i - \sigma\gamma_i) a_i$ ist eine Darstellung von c mit weniger Vektoren.

Widerspruch zur Minimalität der Menge $\{a_1, \ldots, a_k\}$. $\square$