

Kombinatorik, Graphen, Matroide

9. Übung

- Ein ungerichteter planarer Graph G heißt *selbstdual*, wenn es eine Einbettung von G gibt, so dass G in bezug auf diese Einbettung isomorph zu G^* ist.
 - Welche regulären selbstdualen Graphen gibt es?
 - Gibt es (bezüglich der Knotenzahl) beliebig große selbstduale Graphen? (2+2 Punkte)
- Sei G ein zusammenhängender Graph mit planarer Einbettung Φ . Es sei G^* der planare Dualgraph dazu. Zeigen Sie, dass die Zahl der aufspannenden Bäume für G und G^* gleich ist. (3 Punkte)
- Betrachten Sie den Greedy-Knotenfärbungsalgorithmus, in dem die Knoten in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden und jeder Knoten die kleinste noch nicht an seinen schon gefärbten Nachbarn benutzte Farbe bekommt. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ einen Graphen G mit $|V(G)| = 2n$ und $\chi(G) = 2$ gibt, so dass, wenn die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge durchlaufen werden, der Greedy-Algorithmus n Farben benötigt. Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Graphen G eine Sortierung der Knoten gibt, so dass, wenn der Greedy-Algorithmus die Knoten in dieser Reihenfolge betrachtet, er nur $\chi(G)$ Farben benötigt. (2 Punkte)
- Für einen einfachen Graphen G sei $t(G)$ die kleinste Zahl, für die es planare Graphen $G_1, \dots, G_{t(G)}$ gibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - $V(G_i) = V(G)$ ($i \in \{1, \dots, t(G)\}$),
 - $E(G) = \bigcup_{i=1}^{t(G)} E(G_i)$.

Ein Graph G ist also genau dann planar, wenn $t(G) = 1$ gilt.

- Zeigen Sie, dass $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt.
- Zeigen Sie, dass es Graphen G mit $t(G) = 2$ und $\chi(G) = 8$ gibt.
- Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für den folgenden Wert an:

$$\max\{\chi(G) \mid t(G) = 2\}.$$

Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schranke. (2+2+3 Punkte)

Homepage der Übung:

http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ss18/kgm_uebung_ss18.html

Abgabe: Dienstag, den 19.6.2018, vor der Vorlesung.

Ein Hinweis der Fachschaft Mathematik:

Die Fachschaft Mathematik feiert am 21.06. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 18.06., Di. 19.06. und Mi 20.06. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.