

Kombinatorik, Graphen, Matroide

11. Übung

1. Für einen ungerichteten Graph G und $t \in \mathbb{N}$ sei $p_G(t)$ die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von G mit den Farben $\{1, \dots, t\}$. Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß für jeden Graphen G die Abbildung $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad $|V(G)|$ ist. (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten v und w gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie v und w durch eine zusätzliche Kante verbinden oder $\{v, w\}$ kontrahieren.

2. (a) Bestimmen Sie p_G (siehe Aufgabe 1) für den Fall, daß G ein Baum ist.
(b) Wie sieht p_G aus, wenn G ein Wald ist, der aus k Zusammenhangskomponenten besteht? (4 Punkte)
3. Geben Sie ein Matroid an, das kein graphisches Matroid ist. (4 Punkte)
4. Sei G ein ungerichteter Graph und $k \in \mathbb{N}$. \mathcal{F} bestehe aus den Teilmengen von $E(G)$, die die Vereinigung der Kantenmengen von k Wäldern sind. Zeigen Sie, daß $(E(G), \mathcal{F})$ ein Matroid ist. (4 Punkte)