

## Übungsblatt 10

### Aufgabe 1:

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Zeigen Sie:

Eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann konvex, wenn für  $n \in \mathbb{N}$  und beliebige  $x_1, \dots, x_n \in K$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

*Anmerkung:* Diese Ungleichung wird auch *Jensensche Ungleichung* genannt.

### Aufgabe 2:

- Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Zeigen Sie, dass alle lokalen Minima von  $f$  auch globale Minima sind.
- Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\delta_i} \leq \sum_{i=1}^n \delta_i x_i,$$

( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ ,  $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}_+$  mit  $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$ .)

### Aufgabe 3:

Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie: Ist  $f$  konvex, so ist die Menge  $\{x \in K \mid f(x) \leq \alpha\}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  konvex.

Gilt die Umkehrung?

**Aufgabe 4:**

Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Zeigen Sie, dass alle Menge der globalen Minima von  $f$  konvex ist.

**Aufgabe 5:**

Es sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  und  $D^2f(x)$  positiv definit für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass  $f$  streng konvex ist. Gilt auch die Umkehrung?

**Aufgabe 6:**

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann konvex ist, wenn  $Epi(f)$  konvex ist.

**Aufgabe 7:**

Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $x \in K$ . Zeigen Sie die Existenz eines  $n$ -Simplex  $S$  mit  $x \in \overset{\circ}{S}$  und  $S \subseteq K$ .

**Aufgabe 8:**

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für alle  $x, y \in K$  existiere ein  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  konvex ist.

**Aufgabe 9:**

Zeigen Sie, dass das Wolfe-duale eines LP das übliche duale LP ist.

**Aufgabe 10:**

Seien  $f, h_i, g_j$  wie in Satz 2.2.8 und sei  $M[h, g] \neq \emptyset$ . Zeigen Sie, dass

$$\inf\{f(x) \mid x \in M[h, g]\} \geq \sup\{L(x, \lambda, \mu) \mid D_x L(x, \lambda, \mu) = 0, \mu \geq 0\}.$$

Für eine richtige Lösung von Aufgabe 8 gibt es 4 Punkte, für alle anderen Aufgaben 3 Punkte. Lösen Sie von den obigen zehn Aufgaben sieben ihrer Wahl. Es sind also maximal 21 Punkte für das Übungsblatt 10 zu erreichen. Wer Aufgabe 8 vollständig löst, kann einen Zusatzpunkt erlangen.

Abgabe: Dienstag, 6. Juli 2004, vor der Vorlesung.