Inhaltsverzeichnis

20.04.2004

Ausgabe der Übungen Dienstag in der Vorlesung, Rückgabe eine Woche später.

Scheinkriterien:

- 50% der erreichbaren Punkte in den Übungen

- aktive Beteiligung an den Übungen

0.1 Wiederholung und Einführung

0.1.1 Was geschah in Math Opt I?

$A \in \mathbb{Q}^{m\times n}, b \in \mathbb{Q}^m, c \in \mathbb{Q}^n$

- $\max\{c^T x | A \cdot x \leq b\}$ Lineare Programme
- $P = \{x | A \cdot x \leq b\}$
- Lemma von **Farkas**
  $\Rightarrow$ Dualitätssatz der Linearen Programmierung
  $\underbrace{\max\{c^T x | A \cdot x \leq b\}}_{\text{primales LP}} \qquad \underbrace{\min b^T y | A^T y = c, y \geq 0}_{\text{duales LP}}$
- Simplex-Algorithmus
- Ellipsoid-Methode, **Karnakar** Algorithmus

  Praktische Probleme lassen sich oft durch lineare Programme modellieren

- LP
- Ganzzahligkeitsbedingungen

$\rightsquigarrow$ Ganzzahlige lineare Programm (engl. integer linear program (ILP))
$\max\{c^T x | A \cdot x \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$

Bemerkung 0.1.1
Seien A, b, c wie oben. Die beiden Probleme $\max\{c^T x | A \cdot x \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ *und* $\max\{c^T x | A \cdot x = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$ *sind polynomiell äquivalent. (siehe Übung)*

Bemerkung 0.1.2
Ist $y \in \mathbb{Q}^m$ mit $y \geq 0$ und $A^T y = c$, so gilt $c^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y$ Daraus folgt „schwache Dualität“$\max\{c^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \leq \min\{b^T y | A^T y = c, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^n\}$

Bemerkung 0.1.3
Sidn A, b, c nicht rational, so existiert $\max\{c^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ *nicht linear.*

Bemerkung 0.1.4
*Das Lemma von **Farkas** legt die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen nahe.*

1. *$Ax = b$ hat eine nicht-negative ganzzahlige Lösung.*
2. *Ist $y^T A$ nicht-negativ und ganzzahlig, so ist auch $y^T b$ nicht-negativ und ganzzahlig für alle $y \in \mathbb{Q}^m$.*

Dies ist aber i.a. falsch. Gegenbeispiel: $A = (2,3), b = (1)$ $Ax = b \Leftrightarrow (23)(x_1, x_2^T) = 2x_1 + 3x_2 = 1$ hat keine nicht-negative Lösung. $y^T A = (2y, 3y) 2y, 3y \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow y \in \mathbb{N}_0 (y = \frac{k}{2} = \frac{l}{3}, 3k = 2l)$

Kapitel 1

Es geht los

1.1 Beispiele für ILP

Beispiel 1.1.1 (Färbungen von Graphen)
(In der Vorlesung: Beispiel 1.1.1)
Menge von Aufgaben (Jobs). Zwischen ausgezeichneten Paaren von Jobs gibt es die Beziehung, dass diese nicht gleichzeitig ausgeführt werden können. Frage: Wieviele Runden werden „benötigt“ um alle Aufgaben zu erledigen?

Sei $G = (V, E)$ mit $V = 1, 2, \ldots, n$ und $E \subseteq (V, 2)^T$ ein ungerichteter Graph. Eine Abb. $f : V \to 1, \ldots, k$ mit $f(u) \neq f(v) \forall u, v \in V$ mit $u, v \in E$ nennt man eine k-Färbung von G. Man interessiert sich für das kleinste k, für das G eine k-färbung besitzt.

$x_{i,k}$ = Ecke i hat Farbe k y_k = Die Farbe k wird verwendet.

$min \sum_{k=1}^{n} y_k$ $\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = 1 \forall 1 \leq i \leq n$ („jede Ecke ist gefärbt“) $x_{i,k} - y_k \leq 0 \forall 1 \leq i, k \leq n$ („man färbt nur mit verwendeten Farben“) $xi, k + x_{j,k} \leq \forall 1 \leq i \leq j \leq n, i, j \in E, \forall 1 \leq k \leq n$ („$f(i) \neq f(j) \forall i, j \in E$“) $0 \leq x_{i,k}, y_k \leq 1 \forall 1 \leq i, k \leq n$ $x_{i,k}, y_k \in \mathbb{Z} \forall 1 \leq i, k \leq n$ Lässt man nun die Bedingung ... wegfallen, so hat das entstehende LP den optimalen Wert 1. ($x_{i,k} = \frac{1}{n}, y_k = \frac{1}{n} \forall i, k$)

Beispiel 1.1.2 (Traveling Salesman Problem)
(In der Vorlesung: Beispiel 1.1.2)
Sei $K_n = (V, E)$ der vollständige Graph, d.h. $V = 1, 2, \ldots, n$ und $E = (V, 2)^T$. Sei $c : E \to \mathbb{R}_+$. Gesucht wird eine Permutation $\pi \in S_n$, so dass $\sum_{i=1}^{n-1} c(\pi(i), \pi(i + 1)) + c(\pi(n), \pi(1))$ minimal ist.

Beispiel 1.1.3 (Maximum Clique)
(In der Vorlesung: Beispiel 1.1.3)
Sei $K_n = (V, E)$ wie in Bsp. 1.1.2.
Sei $c : V \to \mathbb{R}_+$ und $d : E \to \mathbb{R}_+$.
Gesucht wird eine Menge $C \subseteq V$, für die $c(C) + d(\{e = \{i, j\} | e \in E, i, j \in C\})$ maximal wird, wobei

$$c(C) = \sum_{u \in C} c(u)$$

und

$$d(\tilde{E}) = \sum_{e\in\tilde{E}} c(e).$$

$$\max\left\{c^T x + d^T y, c \in \mathbb{R}^V_+, d \in \mathbb{R}^E_+\right\}$$

$$y_e - x_i \leq 0 \forall i \in e \in E$$

$$x_i + x_j - y_e \leq 1 \forall e = \{i, j\} \in E$$

$$0 \leq x - i, y_e \leq 1$$

$$x_i, y_l \in \mathbb{Z}$$

$\forall i \in V, e \in E$

23.04.2004

1.2 Ganzzahlige Polyeder

Definition 1.2.1 (ganzzahlige Hülle)
(In der Vorlesung: Definition 1.2.1)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ *und sei* $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq yb\}$. *(P ist Polyeder)*
Die ganzzahlige Hülle P_I *von* P *ist die konvexe Hülle aller ganzzahligen Vektoren in* P_1*, d.h.*

$$P_I = \text{conv}(\{x \in P | x \in \mathbb{Z}^n\})$$

Ist $P = P_I$*, so nennt man* P *einen ganzzahligen Polyeder.*

Proposition 1.2.1
(In der Vorlesung: Proposition 1.2.2)
Seien $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}, b \in \mathbb{Q}^m, c \in \mathbb{Q}^n$ *und* $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$. *Sei* $P_I \neq \emptyset$.
Es gilt $\max\{c^T x | x \in P\}$ *ist genau dann unbeschränkt,*
wenn $\max\{c^T x | x \in P_I\}$ *unbeschränkt ist.*

Beweis Proposition 1.2.1

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$ *Sei* $\max\{c^T x | Ax \leq b\}$ *unbeschränkt.*
$\Rightarrow$ *(Dualitätssatz) Das duale Problem* $\min\{b^T y | y \geq 0, A^T y = c\}$ *besitzt keine zulässige Lösung.*
$\Rightarrow$ *(Farkas)* $\exists z \in \mathbb{Q}^n : c^T z \leq 0, Az \geq 0$.
$\Rightarrow$ ***oBdA*** $z \in \mathbb{Z}^n$.
Sei $y \in P_I \Rightarrow y - k \cdot z \in P_I \forall k \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow c^T(y - k \cdot z) = c^T y - k \cdot \underbrace{c^T z}_{=0} \leftarrow_{k\leftarrow\infty} \infty$
$\Rightarrow \max\{c^T x | x \in P_I\}$ *unbeschränkt.*

Satz 1.2.2
(In der Vorlesung: Satz 1.2.3)
Es sei P *ein raionales Polyeder, d.h.* $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}, A \in \mathbb{Q}^{m\times n}, b \in \mathbb{Q}^m$
Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *P ist ganzzahlig, d.h.* $P = P_I$

2. *Jeder Schnitt einer Stützhyperebene von P mit P enthält ganzzahlige Vektoren.*

3. $\max\{c^T x | x \in P\}$ *hat eine ganzzahlige Lösung für alle c, für die das Maximum endlich ist.*

BEWEIS SATZ 1.2.1

1 ⇒ 2 Sei H eine Stützhyperebene von P, d.h. $H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \beta\}$ für ein $a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$ mit $H \cap P \neq \emptyset$ und $a^T x \leq \beta \forall x \in P$.
Sei $x \in H \cap P$. Da $P = P_I$ gilt, ist x eine Konvexkombination ganzzahliger Elemente von P_I.
⇒ Alle diese Elemente liegen in $H \cap P$ ⇒ 1.)

2.) ⇒ 3.) Folgt sofort, da $H = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n | c^T \tilde{x} = \max\{c^T x | x \in P\}\}$ eine Stützhyperebene von P ist ⇒ die Behauptung.

3.) ⇒ 1.) Da P_I konvex und abgeschlossen $\exists a, \beta : a^T y \geq \beta, a^T x \leq \beta \forall x \in P_I$.
$\Rightarrow \max\{a^T x | x \in p\} \geq \max\{a^T x | x \in P_I\}$
Widerspruch ⇒ Behauptung.

DEFINITION 1.2.3 (CHARAKTERISTISCHER KEGEL)
(In der Vorlesung: Definition 1.2.4)
Für einen nicht-leeren Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ sei der charakteristische Kegel definiert durch

$$\text{char cone}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n | x + y \in P \forall x \in P\}$$

BEMERKUNG 1.2.4
(In der Vorlesung: Bemerkung 1.2.5)
Es gilt char cone$(P) = \{y \in \mathbb{R}^n | Ay \leq 0\}$
Weiterhin gilt: Ist $P = Q + C$ für $Q = \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_l\})$ und $C = \text{cone}(\{y_1, \ldots, y_k\})$, so folgt $C = \text{char cone}(P)$.

BEWEIS BEMERKUNG 1.2.1
Wir zeigen char cone$(P) = \{y | Ay \leq 0\}$

„⊇“ Ist $y \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ay \leq 0$. Sei $x \in P$.
$\Rightarrow A(x + y) = Ax + Ay \leq Ax \leq b \Rightarrow x + y \in P$
$\Rightarrow y \in charcone(P)$

„⊆“ Sei $y \in charcone(P)$ mit $Ay \not\leq 0$.Sei $x \in P$.
$\Rightarrow x + y \in P \Rightarrow x + ky \in P \forall k \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow A(x + ky) = Ax + kAy \not\leq b$ für k goß genug.
⇒ Behauptung.

SATZ 1.2.5 (MEYER 1974)
(In der Vorlesung: Satz 1.2.6)
Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ ein rationaler Polyeder, d.h. $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^n$. So folgt, dass P_I ein Polyeder ist und $charcone(P) = charcone(P_I)$.
Übung: Dies gilt i.a. nicht für nicht rationale Polyeder.

Beweis Satz 1.2.2

Sei $P = Q + C$ *wobei* $Q = conv(\{x_1, \dots, x_k\})$ *und* $C = \text{cone}(\{y_1, \dots, y_s\})$.

$C = \{y|Ay \leq 0\} \overset{OE}{\Rightarrow} y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Q}^n \overset{OE}{\Rightarrow} y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Z}^n$.

Beh.: $P_I = (Q + B)_I + C$

Da $(Q + B)$ *beschränkt ist, ist* $(Q + B)_I$ *ein Polyeder und diese Behauptung impliziert den Satz.*

Beweis der Behauptung:

Zunächst: $P_I \subseteq (Q + B)_I + C$*: Sei* p *ein ganzzahliger Vektor aus* P.

$\Rightarrow p = q + c, q \in Q, c \in C$

$c = b + c'$ *für* $b \in B$ *und* $c' \in C, c' \in \mathbb{Z}^n$.

(Ist $c = \sum_{i=1}^s \lambda_i y_i = \underbrace{\sum_{i=1}^s \lfloor \lambda_i \rfloor y_i}_{=c'} + \underbrace{\sum_{i=1}^s (\lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor) y_i}_{=b}$*)*

$\Rightarrow p = (q + b) + c'$

$\Rightarrow q + b = p - c' \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow q + b \in (Q + B)_I$

$\Rightarrow p = (q + b) + c' \in (Q + B)_I + C$

„$P_I \supseteq (Q + B)_I + C$“*: Es gilt* $C = C_I$ $(Q + B)_i + C \subseteq P_I + C = P_I + C_I \subseteq (P + C)_I = P_I$

Satz 1.2.6 (Gordan 1873)

(In der Vorlesung: Satz 1.2.7)

Zu jedem rationalen polyhedralen Kegel $C = \{x|Ax \geq 0\}, A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ *existiert eine Menge von ganzzahligen Vektoren* $\{a_1, \dots, a_t\}$*, so dass jeder ganzzahlige Vektor in* C *eine nicht-negative ganzzahlige Linearkombination der Vektoren* a_i *ist.*

(Eine solche Menge nennt man auch Hilbert Basis von C*)*

Beweis Satz 1.2.3

Sei $C = \text{cone}(\{b_1, \dots, b_k\})$ *mit* $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}^n$.

Seien $a_1, \dots, a_t$ *alle ganzzahligen Vektoren in* $\{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k | 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \forall 1 \leq i \leq k\}$

$\Rightarrow \text{cone}(\{a_1, \dots, a_t\}) = C$

Sei $b \in C$ *ganzzahlig* $\Rightarrow b = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_k b_k$ *für* $\mu_1, \dots, \mu_k \geq 0$

$\Rightarrow b = \lfloor \mu_i \rfloor b_1 + \dots + \lfloor \mu_k \rfloor b_k + (\mu_1 - \lfloor \mu_1 \rfloor) b_1 + \dots + (\mu_k + \lfloor \mu_k \rfloor) b_k$

und der Bektor $b - \lfloor \mu_1 \rfloor b_1 - \dots - \lfloor \mu_k \rfloor b_k = (\mu_1 - \lfloor \mu_1 \rfloor b_1 + \dots + (\mu_k - \lfloor \mu_k \rfloor b_k$ *ist einer der Vektoren* $a_1, \dots, a_k$.

$$\{b_1, \dots, b_k\} \subseteq \{a_1, \dots, a_t\}$$

$\Rightarrow$ *Behauptung*

Übung: Minimale Hílbertbasen sind eindeutig.

Lemma von Farkas $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

$$\exists x : Ax \leq b <\Rightarrow (y \geq 0, y^T A00 \Rightarrow y^T b \geq 0)$$

Satz von Caratheodery Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \text{cone}(X)$
$\Rightarrow x \in \text{cone}(\{x_1, \dots, x_d\}), x_1, \dots, x_d \in X$ linear unabhängig.

Proposition 1.2.2
(In der Vorlesung: Proposition 1.2.8)
Hat das System $Ax \leq b$ keine Lösung, so existiert ein Teilsystem $A'x \leq b'$ mit höchstens $n+1$ Ungleichungen, das keine Lösung besitzt.

Beweis Proposition 1.2.2
$Ax \leq b$ *hat keine Lösung* $\Rightarrow \exists y \geq 0, y^T A = 0, y^T b \leq 0$
$\Rightarrow (0, 0, \ldots, 0, y^T b) \in \text{cone}(\{(a_i^T, b_i) | 1 \leq i \leq m\})$ *wobei* $A = (--a_1^T--, \ldots, --a_m^T--)^T$
$\Rightarrow (0, 0, \ldots, 0, y^T b) \in \text{cone}(\{(a_i^T, b_i) | i \in \{i_1, \ldots, i_l\}\}), l \leq n+1$
$\Rightarrow Ax \leq b$ *hat keine Lösung.*

27.04.2004

Satz 1.2.7 (Bell und Scarf 1977)
(In der Vorlesung: Satz 1.2.9)
Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ *und* $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. *Hat das System* $a_i^T x \leq b_i \forall 1 \leq i \leq m$ *keine ganzzahlige Lösung, dann existiert ein Teilsystem mit höchstens* 2^n *Ungleichungen, das ebenfalls keine ganzzahlige Lösung besitzt.*

Beweis Satz 1.2.4
Wir nehmen an, dass das System $a_i^T x \leq b_i \forall 1 \leq i \leq m$ *keine ganzzahlige Lösung hat und minimal ist bezüglich dieser Eigenschaft.*
$\Rightarrow \forall 1 \leq j \leq m \exists x_j \in \mathbb{Z}^n$ mit $a_i^T x_j \leq b_i \forall 1 \leq i \leq m, i \neq j$
Wir nehmen an, dass $m \geq 2^n$
Sei $Z = \mathbb{Z}^n \cap \text{conv}(x_1, \ldots, x_m)$
Wir wählen $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$, *so dass*

1. $\gamma_j \geq \min\{a_j^T z | z \in Z$ *und* $a_j^T z \geq \beta_j\} \forall 1 \leq f \leq m$
2. *Das System* $a_j^T x \leq \gamma_j \forall 1 \leq j \leq m$ *hat keine Lösung in* Z.
3. *Die Zahlen* γ_j *sind gemäß 1.) und 2.) so gewählt, dass* $\sum_{j=1}^m \gamma_j$ *maximal ist.*

Die Zahlen γ_j *sind wohldefiniert.*
$->$ *Setzt man* $\gamma_j = \min\{a_j^Z z \in Z : a_j^T z \geq \beta_j\} \forall 1 \leq j \leq m$ *so hat das System* $a_j^T x \leq \gamma_j \forall 1 \leq j \leq m$ *so folgt* $\exists j_0$:
$a_{j_0}^T x \geq b_{j_0} \overset{\text{(Def)}}{\Rightarrow} a_{j_0}^T x \geq \gamma_{j_0}$ *Widerspruch*
$-> \forall 1 \leq j \leq m$ *gilt* $\gamma_j \leq a_j^T x_j$
Falls $\gamma_j \geq a_j^T x_j$ *für ein* $1 \leq j \leq m$ *so folgt* $a_i^T x_j \leq \ldots \Rightarrow$ *Die Menge aller Vektoren* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ *die 1.) und 2.) erfüllen ist* $\neq \emptyset$ *und abgeschlossen.*
Da $\gamma_i + \cdots + \gamma_m$ *maximal ist, existiert* $\forall 1 \leq j \leq m$ *ein* $y_j \in Z$ *mit* $a_j^T y_j = \gamma_j$ *und*

$$a_i^T y_j \leq \gamma_i \forall 1 \leq i \leq m, i \neq j$$

Da $m \geq 2^n$ *gibt es* $1 \leq k \leq l \leq m$ *mit* $y_k \equiv y_l (\mod 2)$
$\Rightarrow \frac{1}{2}(y_k + y_l) \in Z$ *und* $a_i^T(\frac{1}{2}(y_k + y_l)) =$ *Widerspruch zu 2.) bei der Wahl der* γ_i.

Folgerung 1.2.1
(In der Vorlesung: Folgerung 1.2.10)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
Ist $\max\{c^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ *endlich, so existiert ein Teilsystem* $A'x \leq b'$ *mit höchstens* $2^n - 1$ *Ungleichungen, so dass*

$$\max\{c^T x|Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} = \max\{c^T x|A'x \leq b', x \in \mathbb{Z}^n\}$$

1.3 Einige Abschätzungen

Lemma 1.3.1 (Minkowski 1896)
(In der Vorlesung: Lemma 1.3.1)
Ist $C = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax \leq 0\}$ *mit* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *ein polyedraler Kegel, dann wird* C *von einer Teilmenge* Y *der Menge aller Lösungen der Systeme* $My = b'$ *erzeugt, wobei* M *aus* n *linear unabhängigen Zeilen der Matrix* $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ *besteht und* $b' = \pm e_j$ *für einen Einheitsvektor* e_j *gilt.* $(C = \mathrm{core}(Y))$

Beweis Lemma 1.3.1
Sei $Y = \{y_1, \dots, y_z\}$ *die Menge aller Lösungen der Systeme* $Mx = b'$ *die zu* C *gehören.*

(I.A.) Fall 1: $C = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax = 0\}$, *d.h.* C *ist linearer Teilraum.*
Sei $C = \{x \in \mathbb{R}^n|A'x = 0\}$ *wobei* A' *aus einer maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen von* A *gebildet wird.*
Sei I' *eine Matrix die aus Zeilen von* I *besteht, so dass* $\begin{pmatrix} A' \\ I' \end{pmatrix}$ *eine reguläre Matrix ist.*

$\Rightarrow$ C *wird erzeugt von den Lösungen von* $\begin{pmatrix} A' \\ I' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ *für* $b = \pm e_j, j = 1, \dots, \dim C$

Ind. Schritt C *ist kein linearer Raum. Sei* a *eine Zeile von* A *und* A' *eine Teilmatrix von* A, *so dass die Zeilen von* $\begin{pmatrix} A' \\ a^T \end{pmatrix}$ *linear unabhängig sind und* $\{x \in \mathbb{R}^n|A'x = 0, a^T x \leq 0\} \subseteq C$

$\Rightarrow$ $\exists 1 \leq s \leq t : A'y_s = 0$ *und* $a^T y_s = -1$
Sei $z \in C$ *beliebig. Seien* $a_1, \dots, a_m$ *die Zeilen von* A *und setze:*

$$\mu := \max\{\frac{a_i^T z}{a_i^T y_s}|1 \leq i \leq m, a_i^T y_s \leq 0\}$$

$\Rightarrow$ $\mu = 0$. *Sei* $k \in \{a, \dots, m\}$ *mit* $\frac{a_k^T z}{a_k^T y_s} = \mu$ $(a_k^T y_s \leq 0)$
Sei $z' = z - \mu y_s$. $\Rightarrow z' \in C' = \{x \in C|a_k^T x = 0\}$
$(a_k^T z' = a_k^T z - \mu a_k^T y_s = 0)$. *Sei* $j \in \{1, \dots, m\}\setminus\{k\}$. $a_j^T z' = a_j^T z - \mu a_j^T y_s = \dots$

$$= Fallunterscheidung$$

Per Induktion über die Dimension von C $\quad\Rightarrow C' = \mathrm{cone}(Y)$

$\Rightarrow$

$$z' = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i y_i \text{ für } \lambda_i \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda'_j := \lambda_j + \mu \geq 0, \lambda'_i := \lambda_i \geq 0 (i \neq s) : z = z' + \mu y_s = \sum_{i=1}^{t} \lambda'_i y_i$$

$\Rightarrow$

$$z \in \text{cone}(Y) \Rightarrow C = \text{cone}(Y)$$

Satz 1.3.2
(In der Vorlesung: Satz 1.3.2)
Sei $P = \{x | Ax \leq b\}, A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$ und sei Δ der maximale Betrag einer Teildeterminante von $[Ab]$. Dann gilt:

$$P_I = \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_t\}) + \text{cone}(\{y_1, \ldots, y_s\})$$

wobei die Vektoren $x_1, \ldots, x_z, y_i, \ldots, y_s$ ganzzahlig sind und alle ihre Komponenten maximalen Betrag $(n+1)\Delta$ haben.

Beweis Satz 1.3.1
Ist $P_I \neq 0 \Rightarrow$ Behauptung
Sei

$$\begin{aligned} P_I \neq \emptyset, \Rightarrow \text{core}(\{y_1, \ldots, y_s\}) &= \text{char cone}(P) \\ &= \{x | Ax \leq 0\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (Lem 1.3.1 + Cramersche Regel) $\exists y_1, \ldots, y_s \in \mathbb{Z}^n$ mit $\{x | Ax \leq 0\} = \text{core}(\{y_1, \ldots, y_s\})$
und alle Komponenten der Vektoren $y_1, \ldots, y_s$ haben maximalen Betrag Δ.
Es gilt:

$$P = \text{conv}(\{z_1, \ldots, z_k\}) + \text{core}(\{y_1, \ldots, y_s\})$$

wobei $z_1, \ldots, z_k$ Vektoren sind, deren Komponenten Quotienten von Teildeterminanten von $[Ab]$ sind. Insbesondere haben alle Komponenten der z_i maximalen Betrag Δ.
Seien $x_1, \ldots, x_t$ die ganzzahligen Vektoren in

$$\text{conv}(\{z_1, \ldots, z_k\}) + \left\{ \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_i | 0 \leq \mu_i \leq 1 \forall 1 \leq i \leq s \right\}$$

und höchstens n der Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ sind von 0 verschieden.

Alle Komponenten der x_j haben maximalen Betrag $(1+n)\Delta$.
Wir zeigen: $P_I = \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_t\}) + \text{cone}(\{y_1, \ldots, y_s\})$
Sei $H : a^T x = b$ eine Stützhyperebene von $P_I (a^T y \leq b \forall y \in P_I, H \cap P_I \neq \emptyset)$
Es genügt zu zeigen, dass H einen der Vektoren $x_1, \ldots, x_t$ enthält.

$\Rightarrow H \cap P_I$ *enthält einen ganzzahligen Vektor* $x^* \in \mathbb{Z}^n$.
Da $x^* \in P : x^* 0 \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_s y_s$
wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_s \geq o, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$
und höchstens n *der* $\mu_j \neq o$ *sind.*
Es gilt:

$$\begin{aligned} a^T y_j \leq 0 \qquad & 1 \leq j \leq s \\ (a^t z_i \qquad & 1 \leq i \leq k) \end{aligned}$$

Sei $\tilde{x} = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k + (\mu_1 - \lfloor \mu_1 \rfloor) y_1 + \cdots + (\mu_s - \lfloor \mu_s \rfloor) y_s$
$\Rightarrow \tilde{x} \in H \cap P_I \qquad \tilde{x} \in \{x_1, \ldots, x_t\}$
$\Rightarrow$ *Behauptung*

30.04.2004

Satz 1.3.3
(In der Vorlesung: Satz 1.3.2)
Sei $P = \{x | Ax \leq b\}, A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, \Delta[Ab]$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} P_I = \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_)\} + \operatorname{cone}(\{y_1, \ldots, y_s\}) \\ |\operatorname{cone}(\{y_1, \ldots, y_s\})| \leq (n+1)\Delta \\ x_i, y_j \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Beweis Satz 1.3.2
Wird noch nachgetragen...

Satz 1.3.4 (Cook, Gerhards, Schrijver, Tardos 1986)
(In der Vorlesung: Satz 1.3.3)
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, *so dass jede Teildeterminante von* A *maximal den Betrag* Δ *hat.*
Sei $b \in \mathbb{R}^m$ *und* $c \in \mathbb{R}^n$.
Sind sowohl

1. $\max\{c^T x | Ax \leq b\}$ *als auch*
2. $\max\{c^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$

endlich, so folgt

1. *Zu jeder optimalen Lösung* y *von (1) existiert eine optimale Lösung* z *von (2) mit der Eigenschaft*
   $\|y - z\|_\infty \leq n\Delta$
2. *Zu jeder optimalen Lösung* z *von (2) existiert eine optimale Lösung* y *von (1) mit der Eigenschaft*
   $\|y - z\|_\infty \leq n\Delta$

Beweis Satz 1.3.3
Wird noch nachgetragen...

04.05.2004

Satz 1.3.5 (Wolsey 1981, Cook et al. 1986)
(In der Vorlesung: Satz 1.3.8)
Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, so dass jede Teildeterminante von A maximal den Batrag Δ hat. Es existiert eine ganzzahlige Matrix M, deren Einträge alle maximal den Betrag $n^{2n} \cdot \Delta^n$ haben, so dass zu jedem $b \in \mathbb{Q}^n$ ein d existiert mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}_I = \{x \in \mathbb{R}^n | Mx \leq d\}$$

Wichtig: Die Matrix M hängt nur von A ab.

Beweis Satz 1.3.4
Wir benutzen folgende Eigenschaft (folgt aus dem Beweis von Satz 2.19 aus MOI)

$$\begin{aligned} \operatorname{cone}(\{a_1,\dots,a_m\}) &= \{x | b_j^T x \leq 0 \forall 1 \leq j \leq s\} \\ \Leftrightarrow \operatorname{cone}(\{b_1,\dots,b_s\}) &= \{x | a_i^T x \leq 0 \forall 1 \leq i \leq m\} \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $A \neq 0$. Sei $A = \begin{pmatrix} -a_1^T- \\ \vdots \\ -a_m^T- \end{pmatrix}$ und sei $C = \operatorname{cone}(\{a_a,\dots,a_m\})$.
Sei $L = \{z \in \mathbb{Z}^n | \, \|z\|_\infty \leq n\Delta\}$
Für jede Menge $K \subseteq L$ sei $C_K = C \cap \{y | z^T y \leq 0 \forall z \in K\}$.
Mit der obigen Bemerkung und Lemma 1.3.1 folgt, dass $C_K = \{y | Uy \leq 0\}$ für eine Matrix U deren EInträge alle den maximalen Betrag $n\Delta$ haben.

$\overset{L1.3.1}{\Longrightarrow}$ *C_K wird erzeugt durch eine endliche Menge $G(K)$ genzzahliger Vektoren, deren Komponenten alle maximal den Betrag $n!(n\Delta)^n \leq n^n \cdot n^n \cdot \Delta^n$ haben.*

*Sei M die Matrix mit den Zeilen $\bigcup_{K\subseteq L} G(K)$. Da $C_\emptyset = C \qquad (K = \emptyset)$, sind $a_1^T,\dots,a_m^T$ **oBdA** Zeilen von M.*
Sei $b \in \mathbb{Q}^n$ beliebig.

- $\rightarrow$ *Hat $Ax \leq b$ keine Lösung, ergänzen wir den Vektor b beliebig zu einem Vektor d und erhalten $\{x | Mx \leq d\} \subseteq \{x | Ax \leq b\} = \emptyset$*
- $\rightarrow$ *Das System $Ax \leq b$ hat eine Lösung aber besitzt keine ganzzahlige Lösung.*
  Setze $b' = b - A'I$, wobei A' aus A durch bilden der Beträge aller Komponenten entsteht und $I = (1,\dots,1)^T$.

  Anmerkung: *$Ax \leq b'$ hat eine Lösung. Sei $\tilde{x} : A\tilde{x} \leq b' \Rightarrow A\tilde{x} + A'I \leq b$ $\Rightarrow$ Entsteht $\tilde{x}$ durch Aufrunden aller Komponenten von $\tilde{x}$, so gilt $A\tilde{x} \leq b$ Widerspuch!.*

$Ax \leq b'$ hat keine Lösung $\Rightarrow$ ...

- $\rightarrow$ *$Ax \leq b$ hat eine ganzzahlige Lösung. Für $y \in C$ sei $\delta_y := \max\{y^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$.*

Beh.1:

$$\{xAx \leq b\}_I = \{x | y^T x \leq \delta_y \forall y \in \bigcup_{K \subseteq L} G(K)\}$$

Dazu: „$\subseteq$" *sofort klar mit Def. von* δ_y

„$\supseteq$" *Sei* c *ein beliebiger Vektor, für den* $\max\{c^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ *beschränkt ist und sei* x^* *eine optimale Lösung. Wir zeigen:*

$$\begin{aligned} c^T x \leq c^T x^* \quad & \forall \quad x : y^T x \leq \delta_y \\ & \forall \quad y \in \bigcup_{K \subseteq L} G(K) \end{aligned}$$

Es folgt: $\max\{Ax \leq b\}$ *ist beschränkt.*

$\Rightarrow$ *Das duale LP* $\min\{b^T y | A^T y = c^T, y \geq 0\}$ *besitzt eine zulässige Lösung.*

$\Rightarrow$ $\exists y \geq 0 : c = y^T A \Rightarrow c \in \text{cone}(\{a_i\}) = C$
Sei $\bar{K} = \{z \in L | A(x^* + z) \leq b\}$

$\Rightarrow$ $c^T z \leq 0 \forall z \in \bar{K}$

$\Rightarrow$ $c \in C_K \Rightarrow \exists \lambda_y \geq 0, y \in G(\bar{K}) : c = \sum_{y \in G(\bar{K})} \lambda_y y$

Beh.2: x^* *ist optimale Lösung von* $\max\{y^T x | Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \forall y \in G(\bar{K})$.

Dazu: *Anm: (Dies gilt nicht)* $\Rightarrow \exists z \in \bar{K} : y^T z \geq 0$. *Widerspruch zur Def. von* $C_{\bar{K}}, G(\bar{K})$

$\Rightarrow$ *Behauptung*

$\Rightarrow$

$$\sum_{y \in G(\bar{K})} \lambda_y \delta_y \overset{Beh2}{=} \sum_{y \in G(\bar{K})} \lambda_y y^T x^* = (\sum_{y \in G(\bar{K})} \lambda_y y)^T x^* = c^T x^*$$

$\Rightarrow$ *Die Ungleichung* $c^T x \leq c^T x^*$ *ist nicht-negative Linearkombination der Ungleichung* $y^T x \leq \delta_y, y \in G(\bar{K})$

$\Rightarrow$ *Beh.1*

1.4 Komplexität und Algorithmen

Beispiel 1.4.1 (Satisfiability)
?? *Boole'sche Funktion* $f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n &= \\ x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n &= \\ \bar{x} &= \\ f(x) &= f((x_1, \ldots, x_n)) = \bigvee_{y \in f^{-1}(1)} (x = y) \\ &= \bigvee_{y = (y_1, \ldots, y_n) \in f^{-1}(1)} ((x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \cdots \wedge (x_m = y_m)) \\ (x_1 = y_1) &= \end{aligned}$$

⇒ *Jede boole'sche Funktion lässt sich in „Disjunktiver Normalform"schreiben,*

$$(x \vee y) \wedge (z \vee w) = (x \wedge z) \vee (x \wedge w) \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge w)$$

⇒ *Jede boole'sche Funktion lässt sich in „Konjunktiver Normalenform"schreiben*

$$f(x) = \bigvee_{\varphi} (\bigwedge_{i} (\bar{x}_i / x_i))$$

z.B. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3/x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2/x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1/x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Satisfiability Problem

Geg.: Eine Boole'sche Funktion f in konjunktiver Normalenform.

Frage: Ist $f \equiv 0$? „Das Satisfiability Problem ist NP-vollständig"$\cong$ Alle Entscheidungsprobleme in der Klasse NP lassen sich auf Satisfiability zurückführen.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (1 - x_3) &\geq 1 \\ x_1 + (1 - x_2) + x_3 &\geq 1 \\ (1 - x_1) + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ 0 \leq x_1, x_2, x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} & \end{aligned}$$

Ganzzahliger Polyeder

Geg.: $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$

Frage: $\exists x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b$?

07.05.2004

Satz 1.4.2 (Khindin's flatness theorem, Lenstra 1983)
(In der Vorlesung: Satz 1.4.2)
Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein f_n mit der folgenden Eigenschaft:
Es existiert ein polynomieller Algorithmus, der für ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$ entweder eine ganzzahlige Lösung oder einen Vektor $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ findet mit

$$\max\{c^T x | Ax \leq b\} - \min\{c^T x | Ax \leq b\} \leq f_n$$

Beweis Satz 1.4.1
Nicht in dieser Vorlesung.

Folgerung 1.4.1 (Lenstra 1983)
(In der Vorlesung: Folgerung 1.4.3)
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.
Es existiert ein polynomieller Algorithmus, der für ein Ungleichungssystem $Ax \leq b, A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$ entweder eine ganzzahlige Lösung oder entscheidet, dass keine solche Lösung existiert.

Beweis Folgerung 1.4.1
Induktion:

$n-1 \to n$ *Wende auf* $Ax \leq b$ *den Algorithmus aus Satz 1.4.2 an.*
Findet dieser ein $x \in \mathbb{Z}^n$ *mit* $Ax \leq b$ *sind wir fertig. Anderenfalls findet er ein* $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ *wie in Satz 1.4.2.*
oBdA *sei* $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ *mit* $\mathrm{ggT}(\{c_1, \ldots, c_n\}) = 1$.
Sei $p = \{x | Ax \leq b\}$. *Sei* $\mu \equiv \min\{c^T x | X \in P\}$. *Beachte:* μ *kann in polynomieller Zeit berechnet werden.*
Sei $P_t = \{x \in P | c^T x = t\}$ *für* $t = \lceil \mu \rceil, \lceil \mu \rceil + 1, \ldots, \lceil \mu + f_n \rceil$. *Jeder Vektor* $x \in P$ *liegt in einem der* P_t.

Übung: $\exists \mathcal{U} \in \mathbb{Z}^{(n-1)\times n}$ *mit:* $\begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}$ *ist unimodular.*
Eis solches $\mathcal{U}$ *kann in polynomieller Zeit gefunden werden.*
Sei $\varphi : \mathbb{R}^n -> \mathbb{R}^{n-1} : x \mapsto \mathcal{U}x$
Sei

$$Q_t = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} | A \begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \leq b\}$$
$$t = \lceil \mu \rceil, \ldots, \lceil \mu + f_n \rceil$$

$\Rightarrow x \in P_t \cap \mathbb{Z}^n \Rightarrow A \begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix} x \leq b$

$\Rightarrow A \begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ \mathcal{U}x \end{pmatrix} \leq b$

$\Rightarrow \mathcal{U}x \in Q_t$

$\overset{\text{ÜA}}{\Rightarrow} \mathcal{U}x \in \mathbb{Z}^{n-1}$

$y \in \mathbb{Z}^{n-1} \cap Q_t \Rightarrow A \left(\begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \right) \leq b \Rightarrow \begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \in P_t$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c^T \\ \mathcal{U} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$.

$\rightsquigarrow$ *Wir erhalten* $(\lceil \mu + f_n \rceil - \lceil \mu \rceil)$ *viele Probleme im* $\mathbb{Z}^{n-1}$.
$\Rightarrow$ *Aussage folgt per Induktion.*

Folgerung 1.4.2 (Lenstra 1983)
Sei $n \in \mathbb{N}$ *fest. Es existiert ein polynomieller Algorithmus, der ganzzahlige lineare Programme*

$$\max\{c^T x | Ax = b, x \in \mathbb{Z}^n, x \geq 0\} \tag{1.1}$$

für rationale n*-Spalten Matrizen* A *und rationale* b *und* c *löst.*

Beweis Folgerung 1.4.2

Satz 1.4.3 (Eisenbrand 2002)
Ein ganzzahliges lineares Programm in fester Dimension mit Kodierungslänge s, *das durch eine feste Anzahl von Ungleichungen gegeben ist, kann in* $O(s)$ *elementaren arithmetischen Operationen auf rationalen Zahlen mit Kodierungslänge* $O(s)$ *gelöst werden.*

Dynamische Programmierung (Bellman 1956 + 57, Dantzig 1997)
Sei $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$.
Wir wollen

$$\max\{c^T x | Mx \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

lösen.

Sei S eine obere Schranke für die Beträge der Komponenten von M und b.
Sei $M = [m_1 m_2 \dots m_n]$ und $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$.
Ist (1.1) endlich, so existiert nach Satz 1.3.3 eine optimale Lösung x, deren Komponenten alle maximal den Betrag $(n+1)(mS)^m$ haben.
$(\Delta \leq m! S^m \leq (mS)^m)$
Sei $\mathcal{U} = (n+1)S(mS)^m$.
Wir definieren einen gerichteten Graphen $G = (V, A), |V| < \infty, A \subseteq V \times V$

$$V = \{0, \dots, n\} \times \{-\mathcal{U}, \dots, \mathcal{U}\}$$

und

$$\begin{aligned} &(\underbrace{(j, b')}_{\in V}, \underbrace{(i, b'')}_{\in V}) \in A \\ \Leftrightarrow \quad & i = j+1, b'' = b' + k m_i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Wir weisen dem Bogen $((j, b'), (i, b''))$ die Länge $-k\gamma_i$ zu.

Lemma 1.4.4
Jede zulässige Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ von (1.1) deren Komponenten durch $(n+1)(mS)^m$ beschränkt sind, entspricht ein-eindeutig einem gerichteten Weg von $(0,0)$ nach (n, b). Die Länge dieses Weges ist $-c^T x$.

Beweis Lemma 1.4.1
mündl.

Satz 1.4.5 (Papadimitriou 1981)
(In der Vorlesung: Satz 1.4.7)
Sei $m \in \mathbb{N}$ fest.
Es existiert ein Algorithmus, der $\max\{c^T x | x \geq 0, Mx = b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ für $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$ löst und dessen Laufzeit polynomiell in $n, \mathrm{size}(c)$ und S ist.

Beweis Satz 1.4.2
mündl.

1.5 Total unimodulare Matrizen

Definition 1.5.1 (unimodular)
(In der Vorlesung: Definition 1.5.1)
Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist unimodular, falls $|\det(A)| = 1$.
Eine Matrix A ist total unimodular, falls jede Teildeterminante den Wert $0, 1$ oder -1 hat.

SATZ 1.5.2 (HOFFMAN UND KRUSKAL 1956)
(In der Vorlesung: Satz 1.5.2)
Eine ganzzahlige Matrix A ist ganau dann unimodular, wenn der Polyeder $\{x|Ax \leq b, x \geq 0\}$ für alle ganzzahligen Vektoren b ganzzahlig ist.

FOLGERUNG 1.5.1
(In der Vorlesung: Folgerung 1.5.3)
Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann total unimodular, wenn für alle ganzzahligen Vektoren b und c beide Optima in der Gleichung

$$\max\{c^T x|Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^T y|A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

in ganzzahligen Vektoren angenommen werden, falls sie endlich sind.

BEWEIS FOLGERUNG 1.5.1
mündl.

21.05.2004

1.6 Total Dual Integrality (TDI)

DEFINITION 1.6.1 (UNIMODULAR)
$A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ *unimodular* $\Leftrightarrow \det A \in \{+1, -1\}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ mit $p \neq q$.
Wir betrachten drei spezielle unimodulare Matrizen.
$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

- $a_{ij} = 1 \forall i = j \neq p; a_{ij} = -1, i = j = p; a_{ij} = 0$ sonst
- $a_{ij} = 1 \forall i = j \in \{p, q\}; a_{ij} = 1$ für $\{i, j\} = \{p, q\}; a_{ij} = 0$ sonst
- $a_{ij} = 1 \forall i = j; a_{ij} = -1$ für $(i, j) = (p, q); a_{ij} = 0$ sonst

Die Multiplikation einer Matrix mit einer dieser drei Matrizen von rechts entspricht folgenden Operationen:

- Multipliziere die p-te Spalte mit -1
- Vertausche die p-te und die q-te Spalte
- Subtrahiere von der p-ten Spalte die q-te Spalte

Jede dieser drei Operationen nennt man unimodulare Transformation.

LEMMA 1.6.2
(In der Vorlesung: Lemma 1.6.1)
Zu jeder rationalen Matrix A, deren Zeilen linear unabhängig sind, existiert eine unimodulare Matrix U, so dass $AU = [B0]$ für eine reguläre Matrix B.

BEWEIS LEMMA 1.6.1
Ang. wir haben eine unimodulare Matrix U mit $AU = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ für eine reguläre quadratische Matrix B. ($U = I, D = A, B = C =$ leer)
Sei $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ die erste Zeile von D.

Wende unimodulare Transformationen so an, dass alle $\delta_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^{k} \delta_i$ minimal ist.
OBdA *gelte weiter $\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_k$.*
$\Rightarrow \delta_1 > 0$, *sonst Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Zeilen von A.*
$\Rightarrow \delta_2 = \ldots \delta_k = 0$

Ersetze B durch $\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \ldots & * & \delta_1 \end{pmatrix}$ *unditeriere.*

Lemma 1.6.3
(In der Vorlesung: Lemma 1.6.2)
Seien $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$.
Das System $Ax = b$ hat genau dann eine ganzzahlige Lösung, wenn $y^T b$ ganzzahlig ist für alle $y \in \mathbb{Q}^m$, für die $y^T A$ ganzzahlig ist.

Beweis Lemma 1.6.2
...

Definition 1.6.4 (face)
Es sei $P = \{x | Ax \leq b\}$ ein Polyeder.
Ein face *von P ist entweder P selber oder der Schnitt von P mit einer Stützhyperebene, d.h. zu jedem face F von P mit $P \neq F$ existiert ein c mit $F = \{x \in P | c^T x = \max\{c^T y | y \in P\}\}$.*
Ein face von P heißt minimal, *falls es kein anderes face von P enthält.*

Satz 1.6.5 (Hoffmann und Kruskal 1956)
(In der Vorlesung: Satz 1.6.3)
Sei $P = \{x | Ax \leq b\}$ ein Polyeder und $\emptyset \neq F \subseteq P$.
F ist genau dann ein minimales face von P, wenn $F = \{x | A'x = b'\}$ für ein Teilsystem $A'x \leq b'$ von $Ax \leq b$.

Beweis Satz 1.6.1
...

Satz 1.6.6 (Edmonds und Giles 1977)
(In der Vorlesung: Satz 1.6.4)
Sei P ein rationaler Polyeder.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *P ist ganzzahlig*
2. *Jedes minimale face von P enthält einen ganzzahligen Vektor*
3. *Jede Stützhyperebene von P enthält einen ganzzahligen Vektor*
4. *Jede rationale ($c \in \mathbb{Q}^n$) Stützhyperebene von P enthält einen ganzzahligen Vektor*
5. *$\max\{c^T x | x \in P\}$ ist ganzzahlig für alle ganzzahligen c, für die das Maximum endlich ist*

Beweis Satz 1.6.2

...

Definition 1.6.7 (Edmonds und Giles 1977)

Ein System $Ax \leq b$ linearer Ungleichungen heißt total dual integral (TDI), *falls das Minumum in der Dualitätsgleichung* $\max\{c^T x | Ax \leq b\} = \min\{b^T y | A^T y = c, y \geq 0\}$ *eine ganzzahlige optimale Lösung y besitzt für alle ganzzahligen Vektoren c, für die das Minimum endlich ist.*

Folgerung 1.6.1

(In der Vorlesung: Folgerung 1.6.6)

Sind $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m$ und $Ax \leq b$ TDI, so ist der Polyeder $P = \{x | Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Beweis Folgerung 1.6.1

1. $\Leftrightarrow$ 2. aus Satz 1.6.6

08.06.2004

Beispiel 1.6.8 (Anwendung der TDI Systeme)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist $2k$-fach kantenzusammenhängend, wenn in jede echte Teilmenge von V mindestens $2k$ Kanten führen.

Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ ist k-fach kantenzusammenhängend, wenn in jeder echten Teilmenge U von $V \geq k$ Bögen enden, die in $U \setminus V$ beginnen.

Satz 1.6.9 (Nash-Williams 1969)

(In der Vorlesung: Satz 1.6.11)

Die Kanten eines $2k$-fach kantenzusammenhängenden ungerichteten Graphen lassen sich so orientieren, dass der entstehhende gerichtete Graph k-fach kantenzusammenhängend ist.

Beweis Satz 1.6.3

(Beweisskizze:)

- *Orientiere die Kanten des sk-fach kantenzusammenhängenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ beliebig und erhalte einen gerichteten Graphen $D = (V, A)$.*
- *Sei P der polyeder in $\mathbb{R}^A$, der durch*

  $$\begin{aligned} 0 \leq x_a \leq 1 \forall a \in A \\ \sum_{a \in \delta^-(U)} x_a - \sum_{a \in \delta^+(U)} x_a \leq \left|\delta^-(U)\right| - k \forall \emptyset \neq U \subsetneqq V \end{aligned}$$

  definiert wird.

  Es gilt $P \neq \emptyset$, denn $x_a = \frac{1}{2} \forall a \in A$ liegt in P.
- *Sei $\emptyset \neq U \subsetneqq V$.*

  $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum_{a \in \delta^-(U)} x_a - \sum_{a \in \delta^+(U)} x_a = \frac{1}{2}\left|\delta^-(U)\right| - \frac{1}{2}\left|\delta^+(U)\right| \leq \left|\delta^-(U)\right| - k \\ &\Leftrightarrow \quad 2k \leq \left|\delta^-(U)\right| + \left|\delta^+(U)\right| \end{aligned}$$

Dies gilt, da G $2k$-fach kantenzusammenhängend ist.
Enthält P einen ganzzahligen Vektor, so folgt die Behauptung.
Denn: $(x_a)_{a\in A} \in \mathbb{Z}^A \cap P$
Drehe auf den Bögen mit $x_a = 1$ die Orientierung um.
$\Rightarrow |\delta^-(U)| - \sum_{a\in\delta^-(U)} x_a + \sum_{a\in\delta^+(U)} x_a \geq k$
$\Rightarrow$ *Der veränderte gerichtete Graph ist k-fach kantenzusammenhängend.*
Zeigt man nun, dass das Ungleichungssystem TDI ist (Frank 1980, Frank und Tardos 1984), so folgt die Existenz eines ganzzahligen Vektors in P und damit die Behauptung.

1.7 Cutting Plane Methode

DEFINITION 1.7.1 (GOMORY-CHVÁTAL SCHNITT)
(In der Vorlesung: Definition 1.7.1)
Für einen Polyeder $P = \{x|Ax \leq b\}$ definieren wir $P' := \bigcap_{P\subseteq H} H_I$, wobei der Schnitt über alle rationalen affinen Halbräume $H = \{x|c^T x \leq \delta\}$ gebildet wird, die P enthalten.
Wir setzen $P^{(0)} : P, P^{(i+1)} := (P^{(i)})'$ für $i \geq 0$.
$P^{(i)}$ nennt man den i-ten Gomory-Chvatal Schnitt von P.

SATZ 1.7.2
(In der Vorlesung: Satz 1.7.2)
Ist $P = \{x|Ax \leq b\}$ ein rationaler Polyeder, so gilt

$$P' = \{x|u^T Ax \leq \lfloor u^T b \rfloor \; \forall u \geq 0 \text{ mit } u^T A \in \mathbb{Z}^n\}.$$

BEWEIS SATZ 1.7.1
Für jeden rationalen, affinen Halbraum $H = \{x|c^T x \leq \beta\}$ mit $c \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$H' = H_I \subseteq \{x|c^T x \leq \lfloor\beta\rfloor\}$$

Beh.: Ist $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ und $\mathrm{ggT}(\{c_1, \ldots, c_n\}) = 1$, so gilt

$$H' = H_I = \{x|c^T x \leq \lfloor\beta\rfloor\}$$

Bew.: Da $\mathrm{ggT}(\{c_i\}) = 1$ist, existiert ein $y_0 \in \mathbb{Z}^n$ mit $c^T y_0 = 1$ (Euklidischer Algorithmus).
$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z}^n : c^T y = \lfloor\beta\rfloor$
Sei $x \in \{z|c^T z \leq \lfloor\beta\rfloor\} \cap \mathbb{Q}^n$. Sei $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha x \in \mathbb{Z}^n$.

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}\left(\underbrace{\alpha x - (\alpha - 1)y}_{\in\mathbb{Z}^n}\right) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} y$$

x ist Konvexkombination ganzzahliger Punkte in H und daher selber Element von $H_I \Rightarrow$ Beh.
Nun zum eigentlichen Beweis:
„$\subseteq$“ Sei $u \geq 0 \Rightarrow P \subseteq \{x|u^T Ax \leq u^T b\}$
$\Rightarrow P^T \subseteq \{x|u^T Ax \leq \lfloor u^T b \rfloor\}$ *falls $u^T A \in \mathbb{Z}^n$.*

„$\supseteq$“ *Ist* $P = \emptyset$, *d.h.* $\nexists x : Ax \leq b \Rightarrow$ *(Frarkas)* $\exists x \geq 0 : y^T A = 0, y^T b < 0$.
$\Rightarrow$ *Beh.*
Sei $P \neq \emptyset$. *Sei* $H = \{x | c^T x \leq \beta\}$ *mit* $P \subseteq H$ *rationaler affiner Halbraum.*
OBdA $c \in \mathbb{Z}^n, \mathrm{ggT}(\{c_i\}_i) = 1$.
$\Rightarrow \geq \max\{c^T x | Ax \leq b\} = \min\{u^T b | u^T A = c^T, u \geq 0\}$
Sei u^* *eine optimale Lösung des Minimierungsproblems.*
$\Rightarrow$ *für alle* $z \in \{x | u^T Ax \leq \lfloor u^T b \rfloor \forall u \geq 0, u^T A \in \mathbb{Z}^n\} \subseteq \{x | u^{*T} Ax \leq \left\lfloor u^{*T} b \right\rfloor\}$
gilt
$c^T z = u^{*T} Az \leq \left\lfloor u^{*T} b \right\rfloor \leq \lfloor \beta \rfloor$
$\Rightarrow z \in H_I \Rightarrow z \in P'$

Satz 1.7.3 (Schrijver 1980)
(In der Vorlesung: Satz 1.7.3)
Seien $P = \{x | Ax \leq b\}, Ax \leq b$ *TDI,* A *ganzzahlig und* b *rational.*
Dann gilt $P' = \{x | Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$.
Insbesondere folgt, dass für alle rationalen Polyeder P *die Menge* P' *wieder ein Polyeder ist.*

Beweis Satz 1.7.2
$P = \emptyset \Rightarrow$ *Beh. Sei* $P \neq \emptyset$.
$\Rightarrow P' \subseteq \{x | Ax \leq \lfloor b \rfloor\}$
Sei $u \geq 0$ *mit* $u^T A \in \mathbb{Z}^n$.
Wegen Satz 1.7.2 genügt es zu zeigen, dass $u^T Ax \leq \lfloor u^T b \rfloor$ *für alle* x *mit* $Ax \leq \lfloor b \rfloor$ *gilt.*
Es gilt

$$u^T b \geq \max\{u^T Ax | Ax \leq b\} = \min\{y^T b | y \geq 0, y^T A = u^T A\}$$

Da $Ax \leq b$ *TDI ist, existiert eine optimale Lösung* $y^* \in \mathbb{Z}^n$ *für das Minimierungsproblem.*
Es folgt nun aus $Ax \leq \lfloor b \rfloor$, *dass*

$$u^T Ax = y^{*T} Ax \leq y^{*T} \lfloor b \rfloor \overset{y^* \in \mathbb{Z}^n}{\leq} \left\lfloor y^{*T} b \right\rfloor \leq \lfloor u^T b \rfloor$$

$\Rightarrow$ *Beh.*

Lemma 1.7.4
(In der Vorlesung: Lemma 1.7.4)
Ist F *ein face eines rationalen Polyeders* P, *so gilt* $F' = P' \cap F$.
Weiter gilt $F^{(i)} = P^{(i)} \cap F$ *für* $i \geq 0$.

Beweis Lemma 1.7.1
Sei $P = \{x | Ax \leq b\}, A$ *ganzzahlig,* B *rational und* $Ax \leq b$ *TDI (Satz* **??***).*
Sei $F = \{x | Ax \leq b, a^T x = \beta\}$ *wobei* $a^T x \leq \beta \forall x \in P$ *und* a, β *ganzzahlig sind.*
$\Rightarrow$ *(Lemma* **??***)* $Ax \leq b, a^T x \leq \beta$ *TDI.*
$\Rightarrow$*(Satz* **??***)* $Ax \leq b, a^T x = \beta$ *TDI.*
Da $\beta \in \mathbb{Z}$, *folgt*

$$\begin{aligned} P' \cap F &\overset{1.7.3}{=} \{x | Ax \leq \lfloor \beta \rfloor, a^T x = \beta\} \\ &= \{x | Ax \leq \lfloor \beta \rfloor, a^T x \leq \lfloor \beta \rfloor, -a^T x \leq \lfloor -\beta \rfloor\} \\ &\overset{1.7.3}{=} F' \Rightarrow \textit{Beh. Der Rest folgt per Induktion.} \end{aligned}$$

Lemma 1.7.5
(In der Vorlesung: Lemma 1.7.5)
Seien $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationaler Polyeder und $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine unimodulare Matrix. Für $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $f(x) = \{\mathcal{U}x | x \in X\}$.

1. *$f(P)$ ist Polyeder.*
2. *$(f(P))' = f(P')$ und $(f(P))_I = f(P_I)$.*

Beweis Lemma 1.7.2
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \mathcal{U}x$ *ist Bij. Insb. (Ü)* $f|_{\mathbb{Z}^n}$ *Bisj. von* $\mathbb{Z}^n$.

$$\begin{aligned} (f(P))_I &= \operatorname{conv}(\{x \in \mathbb{Z}^n | \mathcal{U}^{-1}x \in P\}) = \operatorname{conv}(\{x \in \mathbb{R}^n | \mathcal{U}^{-1}x \in P_I\}) \\ &= f(P_I) \end{aligned}$$

Sei $P = \{x | Ax \leq b\}$ wobei $Ax \leq b$ TDI ist, A ganzzahlig und b rational ist.
$\Rightarrow$ *(Def.)* $A\mathcal{U}^{-1}x \leq b$ *TDI*
$\Rightarrow (f(P))' = \{x | A\mathcal{U}^{-1}x \leq b\}' = \{x | A\mathcal{U}^{-1}x \leq \lfloor b \rfloor\} = f(P')$

Satz 1.7.6 (Schrijver 1980)
(In der Vorlesung: Satz 1.7.6)
Für jeden rationalen Polyeder P existiert ein $t \in \mathbb{N}$ mit $P^{(t)} = P_I$.

Beweis Satz 1.7.3
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationaler Polyeder. Wir beweisen den Satz mit Induktion über $n + \dim(P)$, wobei für $Y \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dim(X) := n - \max\{\operatorname{rg}(A) < A \in \mathbb{R}^{n \times n}, Ax = Ay \forall x, y \in X\}$$

Ist $P = \emptyset$ oder $\dim(P) = 0$, so folgt die Aussage sofort.

Fall 1 $\dim(P) < n$
$\Rightarrow \exists$ *rationale Hyperebene* $K : P \subseteq K$
Enthält K keine ganzzahligen Vektoren, so gilt $K = \{x | a^T x 0 \beta\}$ für $a \in \mathbb{Z}^n$ und
$\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow P' \subseteq \{x | a^T x \leq \lfloor \beta \rfloor, a^T x \geq \lceil \beta \rceil\} \Rightarrow P' = \emptyset$.
Wir nehman an, dass $K \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$ und somit $K = \{x | a^T x = \beta\}$ für $a \in \mathbb{Z}^n, \beta \in \mathbb{Z}$.
OBdA $\beta = 0$. *(Behauptung invariant unter Translation).*
Es existiert eine unimodulare Matrix $\mathcal{U}$ mit $a^T\mathcal{U} = \alpha e_1^T$ (Ü)
OBdA *(Lem 1.7.5)* $a^T = \alpha e_1^T$ $(\mathcal{U} = I)$
$\Rightarrow (a^T x = \beta \Leftrightarrow x = (x_1, \ldots, x_n), x_1 = 0)$ *Per Induktion folgt die Behauptung aus folgenden Beobachtungen:*
Für jeden polyeer $Q \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{N}$ gilt $(\{0\} \times Q)_I = \{0\} \times Q_I$ und $(\{0\} \times Q)^{(t)} = \{0\} \times Q^{(t)}$.

Fall 2 $\dim P = n$

Sei $P = \{x|Ax \leq b\}$ und A ganzzahlig.
$\Rightarrow$ (Satz 1.3.5) $\exists c$ ganzzahlig, D mit

$$P_I = \{x|cx \leq d\}$$

Ist $P_I = \emptyset$, so wähle $C = A$ und $d = b - A'I$ wobei die Einträge von A' genau die Beträge der jeweiligen Einträge von A sind.
Sei $c^T x \leq \delta$ eine Ungleichung aus $cx \leq d$.
Beh.: $\exists s \in \mathbb{N} : P^{(s)} \subseteq H = \{x|c^T x \leq \delta\}$.
*Bew.: $\exists \beta \geq \delta$ mit $P = \{x|c^T x \leq \beta\}$ ($P_I = \emptyset$(Ok), $P_I \neq \emptyset$(Ok)Lem **??**)*
Wir machen die Annahme, dass ein $\gamma \in \mathbb{Z}$ mit $\delta < \gamma \leq \beta$ existeirt, so dass

$$\begin{aligned} P^{(s_0)} &\subseteq \{x|c^T x \leq \gamma\} \text{ für ein } s_o \in \mathbb{N} \text{ und} \\ P^{(s)} &\not\subseteq \{x|c^T x \leq \gamma - 1\} \text{ für alle } s \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \max\{c^T x|x \in P^{(s)}\} = \gamma \forall s \geq s_0$, denn falls $\max\{c^T x|x \in P^{(s)}\} < \gamma$ wäre, so würde $P^{(s+1)} \subseteq \{x|c^T x \leq \gamma - 1\}$ gelten.
Sei $F = P^{(s_0)} \cap \{x|c^T x = \gamma\}$.Es gilt $\dim F < n = \dim P$.
$\Rightarrow$ (Ind.) $\exists s_1 \in \mathbb{N} : F^{(s_1)} = F_I \subseteq P_I \cap \{x|c^T x = \gamma\} = \emptyset$
$\Rightarrow$(Lem 1.7.4)

$$\emptyset = F^{(s_1)} = F \cap P^{(s_0+s_1)} = F \cap (P^{(s_0)})^{(s_1)} \cap \{x|c^T x = \gamma\}$$

Widerspruch $\Rightarrow$ Beh.

Satz 1.7.7 (Cook, Coullard und Turan 1985)
(In der Vorlesung: Satz 1.7.8)
Zu $d \in \mathbb{N}$ existiert ein $t_d \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:
Ist P ein rationaler Polyeder im $\mathbb{R}^d$, der keine ganzzahligen Vektoren enthält ($P_I = \emptyset$), so gilt $P^{(t_d)} = \emptyset$.

Beweis Satz 1.7.4
Induktion über d
$d = 1$ Ok
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ rationaler Polyeder.

Fall 1 $\dim(P) < d$ *analog zu Satz 1.7.7*

Fall 2 $\dim(P) = d$ *Es folgt aus Khindin's flatness theorem (Satz 1.4.2, dass ein $c \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ existiert mit*

$$\max\{c^T x|x \in P\} - \min\{c^T x|x \in P\} \leq f_d.$$

OBdA $\mathrm{ggT}(\{c_i\}) = 1$ *für $c = \{c_1, \ldots, c_d\}$*
Sei $\delta = \lfloor \max\{c^T x|x \in P\} \rfloor$
Beh.: $P^{(k+1+kt_{(d-1)})} \subseteq \{x|c^T x \leq \delta - k\}$ für $0 \leq k \leq f_d + 1$.
Bew.: $k = 0$ Ok
Sei $F = P^{(k+1+kt_{(d-1)})} \cap \{x|c^T x = \delta - k\}$
Da $\dim(F) < d = \dim(P)$ folgt $F^{(t_{(d-1)})} = \emptyset$.
$\Rightarrow P^{(k+1+(k+1)z_{(d-1)})} \cap \{x|c^T x = \delta - k\} \overset{Lem\ 1.7.4}{=} F^{(t_{(d-1)})} = \emptyset$
$\Rightarrow P^{(k+1+(k+1)z_{(d-1)})} \subseteq \{x|c^T x = \delta - k\}$
$\Rightarrow P^{(k+2+(k+1)z_{(d-1)})} \subseteq \{x|c^T x = \delta - k - 1\}$

$q.e.d$

$\Rightarrow P^{(f_d+2+(f_d+1)t_{(d-1)})} \subseteq \{x|c^T x \leq \delta - f_d - 1\}$
Rightarrow Da $P \subseteq \{x|c^T x > \delta - f_d - 1\}, P^{(t_d)} = \emptyset$ *für*

$$t_d := f_d + 2 + (f_d + 1)t_{(d-1)}.$$

$\Rightarrow$ *Beh.*

Satz 1.7.8 (Blair und Jeroslaw 1982)
(In der Vorlesung: Satz 1.7.9)
Zu jeder rationalen Matrix A existiert ein $t \in \mathbb{N}$, so dass
$\{x|Ax \leq b\}^{(t)} = \{x|Ax \leq b\}_I$.

Beweis Satz 1.7.5
OBdA *sei A ganzzahlig. A habe n Spalten und jede Teildeterminante von A habe einen Betrag von höchstens Δ.*
Sei $t := \max\{t_n, n^{2n+2}\Delta^{n+1} + 1 + n^{2n+2}\Delta^{n+1}t_{(n-1)}\}$
Sei b beliebig und $P = \{x|Ax \leq b\}$. Ist $P_I = \emptyset$, so folgt $P^{(t)} = \emptyset$ (Satz 1.7.7).
Sei also $P_I \neq \emptyset$.
Nach Satz 1.3.5 existiert eine Matrix $M = M_A$ mit $P_I = \{x|Mx \leq d\}$. wobei M ganzzahlig ist und der Betrag aller Einträge von M durch $n^{2n}\Delta^n$ beschränkt sind.
Sei $m^T x \leq \delta$ eine Ungleichung in $Mx \leq d$.
OBdA $\delta = \max\{m^T x|x \in P_I\}$.
Sei $\delta' = \lfloor \max\{m^T x|x \in P\} \rfloor$.
Nach Satz 1.3.4 gilt $\delta' - \delta \leq \|m\|_1 n\Delta$
Wie in Satz 1.7.7 zeigt man

$$p^{(k+1+kt_{(n-1)})} \subseteq \{x|m^T x \leq \delta' - k\}$$

für $0 \leq k \leq \delta' - \delta$
$\Rightarrow P^{(t)} \subseteq \{x|m^T x \leq \delta\}$
Rightarrow Beh.

15.06.2004

1.8 Branch-and-Bound Methode

Zu $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}, b \in \mathbb{Q}^m$ und $c \in \mathbb{Q}^n$ wollen wir

$$\max\{c^T x|Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

lösen und bestimmen dazu die Folge $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$, so dass

$$\Pi_k = \{P_1, \ldots, P_k\}$$

mit

1. $P_1, \ldots, P_k$ sind paarweise disjunkte Polyeder im $\mathbb{R}^n$.
2. $P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_k$

Dazu setzen wir $\Pi_1 = \{P\}$ mit $P = \{x|Ax \leq b\}$.
Bestimme

$$\mu_j := \max\{c^T x | x \in P_j\}$$

für $j = 1, \ldots, k$. Sei $1 \leq j^* \leq k$ so, dass $\mu_{j^*} = \max\limits_{i \leq j \leq k} \mu_j$ und sei $x^* = (\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*) \in P_{j^*}$ mit $\mu_{j^*} = c^T x^*$.

Fall 1 Ist x^* nicht ganzzahlig, so wähle eine nicht ganzzahlige Komponente ξ_i^* von x^* und setze

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P_{j^*} | \xi_i \leq \lfloor \xi_i^* \rfloor\} \\ Q_2 &= \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P_{j^*} | \xi_i \geq \lceil \xi_i^* \rceil\} \end{aligned}$$

und

$$\Pi_{k+1} := \{P_1, \ldots, P_{j^*-1}, Q_1, Q_2, P_{j^*+1}, \ldots, P_k\}$$

Fall 2 Ist x^* ganzzahlig, so löst x^* das gegebene ILP.

Satz 1.8.1
(In der Vorlesung: Satz 1.8.1)
Ist P beschränkt, so terminiert die obige Methode („es gilt irgendwann Fall 2“).

Beweis Satz 1.8.1
Sei T so dass

$$P \subseteq \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n | -T \leq \xi_i \leq T \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq k$ wird der Polyeder P_j aus Π_k definiert durch ein System von Ungleichungen, das aus $Ax \leq b$ besteht und einer Teilmenge der Ungleichungen

$$\begin{array}{lll} \xi_i \leq \tau & 1 \leq i \leq n, & \tau = -T, \ldots, T-1 \\ \xi_i \geq \tau & 1 \leq i \leq n, & \tau = -T+1, \ldots, T \end{array}$$

$\Rightarrow k \leq 2^{4Tn}$ $\qquad \Rightarrow$ *Beh.*

1.9 Lagrangerelaxierung von ILP

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige endliche Menge und seien $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.
Sei weiter $\{x \in Q | Ax \leq b\} \neq \emptyset$.
Setzt man für $\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^m$

$$L(\lambda) := \max\{c^T x + \lambda^T (b - Ax) | x \in Q\}$$

so gilt

$$\max\{c^T x | Ax \leq b, x \in Q\} \leq L(\lambda)$$

und man nennt

$$\min\{L(\lambda)|\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \geq 0\}$$

das Lagrange-duale Problem zum Max-Problem

$$\max\{c^T x|Ax \leq b, x \in Q\}$$

Es gilt

$$\min\{L(\lambda)|\lambda \geq 0\} = \max\{c^T x|Ax \leq b, x \in \text{conv}(Q)\}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
& \min\{L(\lambda)|\lambda \geq 0\} \\
= \quad & \min\{\max\{c^T x + \lambda^T(b - Ax)|x \in Q\}|\lambda \geq 0\} \\
= \quad & \min\{\eta|\lambda \geq 0, \eta + \lambda^T(Ax - b) \geq c^T x \forall x \in Q\} \\
= \quad & \max\left\{\sum_{x \in Q} \alpha_x (c^T x) \middle| \sum_{x \in Q} \alpha_x = 1, \sum_{x \in Q} \alpha_x (Ax - b) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0, \alpha_x \geq 0 \forall x \in Q, \beta_j \geq 0 \forall 1 \leq j \leq m\right\} \\
= \quad & \max\left\{c^T(\sum_{x \in Q} \alpha_x x) \middle| \sum_{x \in Q} \alpha_x = 1, A(\sum_{x \in Q} \alpha_x x) \leq b, \alpha_x \geq 0 \forall x \in Q\right\} \\
= \quad & \max\{c^T x|Ax \leq b, x \in \text{conv}(Q)\}
\end{aligned}$$

q.e.d

Anm

$$\begin{array}{rl}
\min c^T x & \qquad \max y^T b \\
Ax \geq b & \qquad y^T A = c^T \\
 & \qquad y \geq 0 \\
x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} & \qquad y := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\
c \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (Ax_1 - b)^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (Ax_1 - b)^T \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c^T x_1 \\ \vdots \\ c^T x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1.9.1
→ $L(\lambda)$ *ist eine konvexe Funktion (s.u.)*
→ *Ist* $\max\{c^T x Ax \leq b, x \in Q\} = \max\{c^T x | Ax \leq b, x \in \text{conv}(Q)\}$
d.h. $\min\limits_{\lambda \geq 0} L(\lambda)$ *ist der gesuchte optimale Wert.*

Kapitel 2

Allgemeine Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

Einige Konventionen: Es sei $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$.
Für $k \geq 0$, offene Mengen $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ bezeichne $C^k(\mathcal{U}, V)$ die Menge der k-fach stetig diffbaren Funktionen $f : \mathcal{U} \to V$.
Für $f \in C^1(\mathcal{U}, V), \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{U}$ bezeichne

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

den Gradienten von f an der Stelle $x \in \mathcal{U}$ als Spaltenvektor.
Für $f = (f_1, \ldots, f_m) \in C^1(\mathcal{U}, V), \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ bezeichne

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

die Jacobi Matrix von f in x.
Seien $I = \{e, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, s\}$ zwei endliche Indexmengen.
Seien $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i \in I$ und $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $j \in J$.
Seien $h = (h_1, \ldots, h_m)$ und $g = (g_1, \ldots, g_s)$. Wir setzen

$$M[h, g] := \{x \in \mathbb{R}^n | h_i(x) = 0 \forall i \in I, g_j(x) \geq 0 \forall j \in J\}$$

Zu $x \in M[h, g]$ wird die Menge $J_0(x) := \{j \in J | g_j(x) = 0\}$
als Menge der aktiven Nebenbedingungen bezeichnet.

Bemerkung 2.0.2
(In der Vorlesung: Bemerkung 2.0.1)
Ohne weitere Einschränkungen kann $M[h, g]$ sehr komplizierte Gestalt haben. (Nach dem Satz von Whitney existiert z.B. zu jeder abg. Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $M = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$)

Definition 2.0.3
(In der Vorlesung: Definition 2.0.2)
Seien $h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I, j \in J$.
Die Menge $M[h,g]$ erfüllt die Lineare Unabhängigkeitsbedingung (LUB) im Punkt $x \in M[h,g]$, falls die Gradienten $Dh_i(x), i \in I$ und $Dg_j(x), j \in J_0(x)$ linear unabhängige Vektoren sind.
Die LUB ist auf $M[h,g]$ erfüllt, falls sie in jedem Punkt von $M[h,g]$ erfüllt ist.

Definition 2.0.4
(In der Vorlesung: Definition 2.0.3)
Es seien $\mathcal{U}, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $F : \mathcal{U} \to V$ eine bijektive Abbildung (mit Inverser F^{-1}). Für $k \geq 0$ nennt man F einen C^k-Diffeomorphismus, falls $F \in C^k(\mathcal{U}, V)$ und $F^{-1} \in C^k(V, \mathcal{U})$ ist.

Satz 2.0.5
(In der Vorlesung: Satz 2.0.4)
Es seien $k \geq 1, h_i, g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I$ und $j \in J$. $M[h,g]$ erfülle die LUB im Punkt $\overline{x} \in M[h,g]$. Sei $p = |J_0(\overline{x})|$.
Dann existieren offene Umgebungen $\mathcal{U}$ von $\overline{x}$ und V von $0 \in \mathbb{R}^n$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\Phi : \mathcal{U} \to V$ mit $\Phi(\overline{x}) = 0$ und

$$\Phi(M[h,g] \cap \mathcal{U}) = (\{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}) \cap V$$

wobei 0_m den Ursprung des $\mathbb{R}^m$ bezeichnet.
$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m=|I|}, \underbrace{y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}}_{\geq 0}, \underbrace{y_{m+p+1}, \ldots, y_n}_{bel})$

18.06.2004

Beweis Satz 2.0.1
*Sei **oBdA** $J_0(\bar{x}) = \{1, \ldots, p\}$.*
Wähle Vektoren $\xi_{m+p+1}, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$, so dass die Menge

$$\{Dh_i^T(\bar{x}) | i \in I\} \cup \{Dg_i^T(\bar{x}) | j \in J_0(\bar{x})\} \cup \{\xi_{m+p+1}, \ldots, \xi_n\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.
Wir setzen

$$\phi := \left(\begin{array}{ccc} y_1 = h_1(x), & y_{m+1} = g_1(x), & y_{m+p+1} = \xi_{m+p+1}^T(x - \bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m = h_m(x) & y_{m+p} = g_p(x) & y_n = \xi_n^T(x - \bar{x}) \end{array} \right) \tag{2.1}$$

$\Rightarrow \phi \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und die Jacobi-Matrix $D\phi(\bar{x})$ ist nicht singulär.
$\Rightarrow$ (Satz über implizite Funktionen) $\exists$ Umgebung $\tilde{\mathcal{U}}$ von $\bar{x}$ und V von $0 \in \mathbb{R}^n$, so dass $\phi : \tilde{\mathcal{U}} \to V$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.
Es gilt $\phi(\bar{x}) = 0$ und $\exists$ Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$ von $\bar{x}$, so dass

$$J_0(x) \subseteq J_0(\bar{x}) \forall x \in \mathcal{U} \cap M[h,g]$$

In den neuen Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ lauten die Nebenbedingungen nun wie folgt

$$\left. \begin{array}{ccc} y_1 = 0 & y_{m+1} \geq 0 & y_{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m = 0 & y_{p+m} \geq 0 & y_n \end{array} \right\} \text{keine Einschränkung}$$

Definition 2.0.6 (Standartdiffeomorphismus)
(In der Vorlesung: Definition 2.0.5)
DerDiffeomorphismus ϕ aus dem Beweis von Satz 2.0.5 wird Standartdiffeomorphismus genannt.

Definition 2.0.7
(In der Vorlesung: Definition 2.0.6)
Es seien $h_i, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \forall i \in I, j \in J$ und $\bar{x} \in M := M[h,g]$.
Setze $T_{\bar{x}}M = \{\xi \in \mathbb{R}^n | Dh_i(\bar{x})\xi = 0 \forall i \in I, Dg_j(\bar{x})\xi = 0 \forall j \in J_0(\bar{x})\}$
und $C_{\bar{x}}M = \{\xi \in \mathbb{R}^n | Dh_i(\bar{x})\xi = 0 \forall i \in I, Dg_j(\bar{x})\xi \geq 0 \forall j \in J_0(\bar{x})\}$
$T_{\bar{x}}M$ heißt der Tangentialraum an M im Punkt $\bar{x}$ und
$C_{\bar{x}}M$ heißt der Tangentialkegel an M im Punkt $\bar{x}$.

Beispiel 2.0.8
(In der Vorlesung: Beispiel 2.0.7)

$$M = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq x_1^{\frac{1}{3}}, x_2 \geq x_1\}$$

$$x \in \operatorname{Inn}(M) \Rightarrow T_{\bar{x}}M = C_{\bar{x}}M = \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} M = M[h,g] \text{ für } h &= \emptyset (m=0) \\ g_1 &= g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + 1 \\ g_2(x) &= 1 - x_1 \\ g_3(x) &= x_2 - x_1^{\frac{1}{3}} \\ g_4(x) &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

$$x = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_1 = -1, x_2 > -1 \right\}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ J_0(x) = \{1\} \\ &\Rightarrow \ Dg_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}^T \\ &\Rightarrow \ T_xM = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} | \xi_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ & \ C_xM = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} | \xi_1 \geq 0, \xi_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = (-1,-1) \quad &\Rightarrow \quad J_0(x) = \{1,3,4\} \\ &\Rightarrow \quad Dg_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \\ & \quad Dg_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^{-\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}^T \\ & \quad Dg_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \\ &\rightarrow \quad T_xM = \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_x M &= \{\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} | \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq \xi_1, \xi_2 \geq \frac{1}{3}\xi_1\} \\ &= \{\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} | \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq \xi_1\} \end{aligned}$$

Satz 2.0.9
(In der Vorlesung: Satz 2.0.8)
Es seien $k \geq 1, h_i, g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \forall i \in I, j \in J$ und $\bar{x} \in M = M[h, g]$.
Erfüllt M die LUB im Punkt $\bar{x}$, so gelten folgende Aussagen:

1. *Ein Vektor ξ gehört genau dann zu $T_{\bar{x}}M$, wenn ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $x \in C^k((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$ existieren, so dass $x(0) = \bar{x}, h_i(x(\tau)) = g_j(x(\tau)) = 0 \forall i \in I, j \in J_0(\bar{x})$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\frac{dx}{dt}(0) = \xi$*
2. *Ein Vektor ξ gehört genau dann zu $C_{\bar{x}}M$, wenn ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $x \in C^k((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$ existieren, so dass $x(0) = \bar{x}, x(t) \in M \forall t \in [o, \varepsilon)$ und $\frac{dx}{dt}(0) = \xi$*

Beweis Satz 2.0.2
„⇐“ (LUB wird hier nicht benötigt)

1. $\underbrace{Dh_i(x(0))\frac{dx}{dt}(0)}_{Dh_i(\bar{x})\xi} = \underbrace{\frac{d}{dt}h_i(x(t))}_{=0}$
   Ebenso folgt $Dg_j(\bar{x})\xi = 0 \forall j \in J_0(\bar{x})$
   $\Rightarrow \xi \in T_{\bar{x}}M$.
2. $Dh_i(\bar{x})\xi = 0$ *wie oben* $\forall i \in I$.
   Da $g_j(x(t)) \geq 0 = g_j(x(0)) \forall t \in [0, \varepsilon)$, folgt
   $$Dg_j(\bar{x})\xi = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left(\underbrace{g_j(x(t)) - g_j(x(0))}_{=0}\right) \geq 0$$
   $\Rightarrow \xi \in C_{\bar{x}}M$.

„⇒“ Wir zeigen nur 2. (1. geht analog).
Sei ϕ der Standartdiffeomorphismus.
Sei $\xi \in C_{\bar{x}}M \Rightarrow D\phi(\bar{x})\xi \in \{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}$.
$\Rightarrow t \geq 0 : tD\phi(\bar{x})\xi \in \{0_m\} \times \mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^{n-m-p}$.
Setze $x(t) := \phi^{-1}(tD\phi(\bar{x})\xi)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & x(\cdot) \in C^k \\ & x(0) = \phi^{-1}(0) = \bar{x} \end{aligned}$$

$x(t) \in M$ für $t \in [o, \varepsilon)$ falls ε klein genug ist.

$$\frac{d}{dt}x(0) = \underbrace{D\phi^{-1}(0)D\phi(\bar{x})}_{I}\xi = \xi \Rightarrow 2.)$$

2.1 Karush-Kuhn-Tucker Punkte

(In der Vorlesung: 2.1)

LEMMA 2.1.1
(In der Vorlesung: Lemma 2.1.1)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \forall i \in I, j \in J$. $M[h, g]$ *erfülle die LUB im Punkt* $\bar{x} \in M[h, g]$.
Sei ϕ *der Standarddiffeomorphismus. Dann existieren* $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$ *mit*

1.
$$Df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j Dg_j(\bar{x}) + \sum_{r=1}^{n-m-p} \nu_r \xi_r$$

2.
$$\lambda_i = \frac{\partial}{\partial y_i}(f \circ \phi^{-1}(0)) \forall 1 \leq i \leq m$$

3.
$$\mu_{j-m} \frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ \phi^{-1}(0)) \forall m+1 \leq j \leq m+p$$

4.
$$\nu_{r-(m+p)} = \frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ \phi^{-1}(0)) \forall m+p+1 \leq j \leq n$$

BEWEIS LEMMA 2.1.1

$$\{Dh_i^T(\bar{x}), Dg_j^T(\bar{x}), \xi_r | i \in I, j \in J_0(\bar{x}), r = m+p+1, \ldots, n\}$$

ist Basis des $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ *1.)*
$e_1 = (1, 0, 0, 0)^T$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(f \circ \phi^{-1}(0)) = Gf(\bar{x}) D\phi^{-1}(0) e_1$$

Sei $\eta := D\phi^{-1}(0) e_1 \Rightarrow e_1 = D\phi(\bar{x})\eta$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} Dh_1(\bar{x})\eta = 1 \\ Dh_i(\bar{x})\eta = 0 \forall 2 \leq i \leq m \\ Dg_j(\bar{x})\eta = 0 \forall f \in J_0(\bar{x}) \\ \xi r \eta = 0 \forall r = m+p+1, \ldots, n \end{array}\right\} \lambda_i = \frac{\partial}{\partial y_i}(f \circ \phi^{-1}(0))$$

SATZ 2.1.2
(In der Vorlesung: Satz 2.1.2)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \forall i \in I, j \in J$.

$M[h,g]$ erfülle die LUB in $\bar{x}$. Sei $\bar{x}$ ein lokales Minimum von $f|_{M[h,g]}$, d.h. es existiert eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $\bar{x}$ mit

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \forall x \in \mathcal{U} \cap M[h,g]$$

Dann existieren $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$, $i \in I, j \in J_0(\bar{x})$ mit

1.

$$Df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x})$$

2. *Die Zahlen λ_i, μ_j sind eindeutig bestimmt.*

3. *$\mu_j \geq 0 \forall j \in J_0(\bar{x})$.*

22.06.2004

Definition 2.1.3
(In der Vorlesung: Definition 2.1.3)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I, j \in J$.
Sei $\bar{x} \in M[h,g]$.
Man nennt $\bar{x}$ einen kritischen Punkt für $f|_{M[h,g]}$, falls Zahlen $\lambda_i, \mu_j \mathbb{R}$ für $i \in I$ und $j \in J_0(\bar{x})$ existieren, die 1. aus Satz 2.1.2 erfüllen.
Man nennt die Zahlen λ_i, μ_j Lagrange Multiplikatoren und die Funktion

$$L(x) := f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(x) - \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j g_j(x)$$

Lagrangefunktion.
Können die Zahlen λ_i, μ_j so gewählt werden, dass 1. und 3. aus Satz 2.1.2 gelten, so nennt man $\bar{x}$ einen Karush-Kuhn-Tucker Punkt (KKT Punkt).

Beispiel 2.1.4
(In der Vorlesung: Beispiel 2.1.4)

1.

$$\begin{aligned} \min (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 & \\ sth. -x_1^2 - x_2^2 + 5 &\geq 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 4 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2$$

Satz 2.1.5
(In der Vorlesung: Satz 2.1.7)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$...

2.2 Konvexe Funktionen

Zur Erinnerung: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ für alle $x, y \in K, \lambda \in [0,1]$.

DEFINITION 2.2.1 (KONKAV / KONVEX)
(In der Vorlesung: Definition 2.2.1)
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und

$$f : K \to \mathbb{R}.$$

Die Funktion f heißt konvex, falls

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2.2}$$

für alle $x, y \in K$ und $\lambda \in [0,1]$.
Die Funktion f heißt streng konvex, falls in 2.2 für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$ echte Ungleichheit gilt.
Die Funktion f heißt (streng) konkav, falls $-f$ (streng) konvex ist.

SATZ 2.2.2
(In der Vorlesung: Satz 2.2.2)
Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist konvex*
2. $$f(y) - f(x) \geq Df(x)(y-x) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

BEWEIS SATZ 2.2.1
1. $\Rightarrow$ 2.

$$\begin{aligned} f(x + \lambda(y-x)) &= f(x) + \lambda Df(x)(y-x) + o(\lambda) \\ &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

Für $\lambda \to 0^+$ folgt

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) + \underbrace{\frac{o(\lambda)}{\lambda}}_{\to 0} \Rightarrow \text{ 2.}$$

2. $\Rightarrow$ 1.

$$\begin{aligned} (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) &\geq (1-\lambda)(f(z) + Df(z)(x-z)) \\ &+ \lambda(f(z) + Df(z)(y-z)) \\ &= f(z) + Df(z)\underbrace{((1-\lambda)(x-z) + \lambda(y-z))}_{=0 \text{ (Def. von } z)} \\ &= f(z) = f((1-\lambda)x + \lambda y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 1.

Satz 2.2.3
(In der Vorlesung: Satz 2.2.3)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ konvex, dann sin dfolgende Aussagen äquivalent:

1. *$\bar{x}$ ist globales Minimum von f.*

2. *$\bar{x}$ ist lokales Minimum von f.*

3. *$Df(\bar{x} = 0$*

Beweis Satz 2.2.2
1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\overset{2.2.2}{\Rightarrow}$ 1.

Satz 2.2.4
(In der Vorlesung: Satz 2.2.4)
Für $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f ist konvex.*

2. *Die Hesse Matrix*

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

it positiv semidefinit $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

25.06.2004

Beweis Satz 2.2.3
1. $\Rightarrow$ 2.
Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ und definiere $\bar{f}$ als $\bar{f}(x) = f(x) - Df(\bar{x})(x - \bar{x})$.
$\Rightarrow$ (f konvex, $-Df(\bar{x})(x - \bar{x})$ konvex) $\bar{f}$ konvex.
$\Rightarrow$ ($D\bar{f}(\bar{x}) = Df(\bar{x}) - Df(\bar{x}) = 0$, Satz 2.2.3) $\bar{f}$ hat in $\bar{x}$ ein globales Minimum.
$\Rightarrow$ ($\bar{f} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$)$D^2\bar{f}(\bar{x}) = D^2 f(\bar{x})$ positiv semidefinit.

Definition 2.2.5 (Epigraph)
(In der Vorlesung: Definition 2.2.5)
Der Epigraph $\mathrm{Epi}(f)$ *einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist die Menge*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} | y \geq f(x)\}$$

Definition 2.2.6 (p-Simplex)
(In der Vorlesung: Definition 2.2.6)
Die konvexe Hülle von $p + 1$ affin unabhängigen Vektoren $a_1, \ldots, a_{p+1} \in \mathbb{R}^n$ nennt man einen p-Simplex. *($p \leq n$)*

Satz 2.2.7
(In der Vorlesung: Satz 2.2.7)
Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine affine, konvexe Menge und $f : K \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so ist f stetig.

Beweis Satz 2.2.4
Sei $\bar{x} \in K$. Sei $S = \mathrm{conv}(\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}) \subset K$ ein n-Simlex, derf $\bar{x}$ enthält. Sei $M = \max_{1 \leq i \leq n+1} f(a_1)$. $\Rightarrow$ $f(x) \leq M \forall x \in S$.

Sei $\gamma > 0$, so dass $\mathcal{B}(\bar{x}, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \bar{x}| < \delta\} \subseteq S$.
Sei y mit $|y - \bar{x}| \leq \eta \leq \gamma$ für ein η, so folgt $x_1, x_2 \in \mathcal{B}(\bar{x}, \gamma)$ wobei

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x} + \frac{\gamma}{\eta}(y - \bar{x}) \\ x_2 &= \bar{x} - \frac{\gamma}{\eta}(y - \bar{x}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \leq M$
$\Rightarrow y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \bar{x}\}), \bar{x} \in \operatorname{conv}(\{y, x_2\})$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\eta}{\gamma} x_1 + \left(1 - \frac{\eta}{\gamma}\right) \bar{x} \\ (&= \frac{\eta}{\gamma}(\bar{x} + \frac{\gamma}{\eta}(y - \bar{x})) + (1 - \frac{\eta}{\gamma})\bar{x}) \\ \bar{x} &= \frac{\eta}{\gamma + \eta} x_2 + \frac{\eta}{\gamma + \eta} y \\ \Rightarrow f(y) &\leq \frac{\eta}{\gamma} M + (1 - \frac{\eta}{\gamma}) f(\bar{x}) \\ f(\bar{x}) &\leq \frac{\eta}{\gamma + \eta} M + \frac{\gamma}{\gamma + \eta} f(y) \\ \Rightarrow f(y) - f(\bar{x}) &\leq \frac{\eta}{\gamma}(M - f(\bar{x})) \\ f(y) &= -\frac{\eta}{\gamma} M + \frac{\gamma + \eta}{\gamma} f(\bar{x}) \\ f(\bar{x}) - f(y) &\leq \frac{\eta}{\gamma}(M - f(\bar{x})) \\ \Rightarrow |f(y) - f(\bar{x})| &\leq \frac{\eta}{\gamma}(M - f(\bar{x})) < \varepsilon \end{aligned}$$

gilt für η mit $\eta < \frac{\varepsilon\gamma}{M - f(\bar{x})}$
$\Rightarrow$ Stetigkeit von f bei $\bar{x}$.

Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann affin linear, wenn $h(x) = a^T x + \beta \forall x \in \mathbb{R}^n$ für $a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz 2.2.8
(In der Vorlesung: Satz 2.2.8)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I, j \in J$. Seien f und $-g_j, j \in J$ konvex und sei $h_i, i \in I$ affin linear.
Ist $\bar{x} \in M[h, g]$ ein KKT-Punkt, so ist $\bar{x}$ ein globales Minimum für $f|_{M[h.g]}$.

Beweis Satz 2.2.5
Sei $\bar{x} \in M[h, g]$ KKT Punkt. $\Rightarrow \exists \lambda_1, \mu_j \qquad i \in I, j \in J_0(\bar{x})$
mit $Df(\bar{x}) = \sum i \in I \lambda_i Dh_i(\bar{x}) + \sum\limits_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x})$
$\mu_j \geq 0 \forall j \in J_0(\bar{x})$
Sei $x \in M[h, g]$ beliebig $\Rightarrow$(Satz 2.2.2) $f(x) - f(\bar{x}) \geq Df(\bar{x})(x - \bar{x})$

$$\Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{Dh_i(\bar{x})(x - \bar{x})}_{=0 \quad 1.} + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j \underbrace{Dg_j(\bar{x})(x - \bar{x})}_{\geq 0 \quad 2.}$$

zu 1.: $h_i(x) 0 h_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow a_i^T x + \beta_i \geq a_i^T \bar{x} + \beta_i$
$\Rightarrow a_i^T(x - \bar{x}) = 0 \forall i \in I$
zu 2.: (Satz 2.2.2)

$$\underbrace{-g_j(x}_{\leq 0} - (\underbrace{-g_j(\bar{x})}_{=0}) \geq -\underbrace{Dg_j(\bar{x})(x - \bar{x})}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) \Rightarrow$ *Beh.*

Motivation $J = \emptyset, f \in C^3, h_i$ affin linear, LUB gelte auf $M[h,g], D^2 f > 0$ (pos def.) $\Rightarrow f$ strikt konvex.
Sei $\bar{x} \in M[h]$ lokales Minimum für $f|_{M[h]}$.

$$h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x)) = \begin{cases} 0 & \rightsquigarrow M[h] \\ \alpha & \rightsquigarrow M[h]_\alpha = M[h - \alpha] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (Satz über implizite Funktionen) $x(\alpha), x(0) = \bar{x}, \lambda(\alpha), \alpha$ klein genug

$$Df(x(\alpha)) = Dh(x(\alpha))\lambda(\alpha)$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &:= f(x) - \lambda^T h(x) \qquad \text{Lagrange Funktion} \\ \varphi(\alpha) &:= L(x(\alpha), \lambda(\alpha)) \end{aligned}$$

Beh: $D\varphi(0) = 0 \qquad D^2\varphi(0) < 0$
Dazu:

$$\begin{aligned} D\varphi(\alpha) &= [\underbrace{Df(x(\alpha)) - \lambda(\alpha)^T Dh(x(\alpha))}_{=0}] Dx(\alpha) - \underbrace{h^T(x(\alpha))}_{=\alpha} D\lambda(\alpha) \\ &= -\alpha D\lambda(\alpha) \\ &\Rightarrow D\varphi(0) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ hat in $\alpha = 0$ ein lokales Maximum.
$\Rightarrow L(x, \lambda)$ hat in $(\bar{x}, \bar{\lambda}) := (x(0), \lambda(0))$ ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung

$$D_x L(x, \lambda) = Df(x) - \lambda^T Dh(x) = 0.$$

Definition 2.2.9 ((Wolff-)Dual)
(In der Vorlesung: Definition 2.2.9)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I, j \in J$. Seien f und $-g_j, j \in J$ konvex und sei $h_i, i \in I$ affin linear. (Wie in Satz 2.2.8)
Sei

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(x) - \sum_{j \in J} \mu_j g_j(x).$$

Zu dem primalen Problem

$$\min\{f(x)|x \in M[h,g]\}$$

ist das (Wolff-)duale *Problem gegeben durch*

$$\max\{L(x,\lambda,\mu)|D_xL(x,\lambda,\mu) = 0, \mu \geq 0\}$$

Satz 2.2.10
(In der Vorlesung: Satz 2.2.10)
Seien f, h_i, g_j wie in Satz 2.2.8.
Sei $\bar{x}$ ein KKT-Punkt für $f|_{M[h,g]}$ mit Lagrangemultiplikatoren $\lambda_i, i \in I, \mu_j, j \in J_0(\bar{x})$.
Setze $\mu_j := 0 \forall j \in J \setminus J_0(\bar{x})$.
Dann ist der Punkt $(\bar{x}, \lambda, \mu)$ eine optimale Lösung des dualen Problems und $L(\bar{x},\lambda,\mu) = f(\bar{x})$.

Beweis Satz 2.2.6

$$\begin{aligned} L(\bar{x},\lambda,\mu) &= f(\bar{x}) - \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{h_i(\bar{x})}_{=0} \\ &= \sum_{j\in J} \underbrace{\mu_j g_j(\bar{x})}_{=0} = f(x) \end{aligned}$$

Seien $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \geq 0$ beliebig.
Sei (x', λ', μ'). so dass $D_xL(x',\lambda',\mu') = 0$ und $\mu' \geq 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\bar{x}) &= L(\bar{x},\lambda,\mu) \geq f(\bar{x}) - \sum_{i\in I} \lambda_i' h_i(\bar{x}) - \sum_{j\in J} \mu_j' g_j(\bar{x}) \\ &= L(\bar{x},\lambda',\mu') \geq L(x',\lambda',\mu') + \underbrace{D_xL(x',\lambda',\mu')}_{=0}(\bar{x} - x') \\ &\geq L(x',\lambda',\mu') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

29.06.2004

2.3 Constraint Qualification

Satz 2.3.1 (John 1948)
(In der Vorlesung: Satz 2.3.1)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I, j \in J$.
Sei $\bar{x} \in M[h,g]$ ein lokales Minimum für $f|_{M[h,g]}$.
Dann existieren reelle Zahlen $\lambda \geq 0; \lambda_i, i \in I; \mu_j \geq 0, j \in J_0(\bar{x})$, die nicht alle gleich 0 sind, so dass

$$\lambda Df(\bar{x}) = \sum_{i\in I} \lambda_i Dh_i(\bar{x} + \sum_{j\in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x}). \tag{2.3}$$

Sind die Gradienten $Dh_i(\bar{x}), i \in I$ linear unabhängig, so ist mindestens eine der Zahlen $\lambda, \mu_j, j \in J_0(\bar{x})$ von 0 verschieden. Schließlich können die Zahlen $\lambda; \lambda_i, i \in I; \mu_j, j \in J_0(\bar{x})$ in (2.3) so gewält werden, dass höchstens $n+1$ von 0 verschieden sind.

Bekannt aus MOI
$a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}^n \qquad i \in I, j \in J, k \in K$

1. $$\left.\begin{array}{rl} cca_i^T\xi < 0, & i \in I \\ b_j^T\xi \le 0, & j \in J \\ c_k^T\xi = 0, & k \in K \end{array}\right\} \text{ ist lösbar}$$

2. $\exists u_i \geq 0$ nicht alle gleich $0, v_j \geq 0, w_k \qquad j \in I ...$, so dass
$$0 = \sum_i u_i a_i + \sum_j v_j b_j + \sum_k w_k c_k$$

Es gilt immer genau eine der beiden Aussagen (1) und (2).
Ist (2) gültig, so können u_i, v_j, w_k so gewält werden, dass höchstens $n+1$ dieser Zahlen $\neq 0$ sind.

Beweis Satz 2.3.1
Sind $Dh_i(\bar{x}), i \in I$ linear abhängig, so folgt die Behauptung sofort.
Seien also $Dh_i(\bar{x}), i \in I$ linear unabhängig.
Besitzt das System
$$\left.\begin{array}{c} Df(\bar{x})\xi < 0 \\ Dh_i(\bar{x})\xi = 0, i \in I \\ Dg_j(\bar{x})\xi > 0, j \in J_0(\bar{x}) \end{array}\right\} \tag{2.4}$$
eine Lösung ξ so folgt:
(Da $Dh_i(\bar{x})$ lin unabh.) $\exists x \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$ mit $x(0) = \bar{x}, h_i(x(t)) = 0 \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon), i \in I$ und $\frac{dx(0)}{dt} = \xi$.
$\Rightarrow \forall j \in J_0(\bar{x}) : g_j(x(t)) = g_j(\bar{x}) + \underbrace{Dg_j(\bar{x})\xi}_{>0} t + o(t)$
$\Rightarrow x(t) \in M[h, g]$ *für alle* $t \in [o, \tilde{\varepsilon})$ *für* $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$.
Da
$$f(x(t)) = f(\bar{x}) + \underbrace{Df(\bar{x})\xi}_{<0} t + o(t)$$
folgt, dass $\bar{x}$ kein lokales Minimum ist. (Widerspruch)
$\Rightarrow$ (2.4) *hat keine Lösung*
$\Rightarrow$ *(MOI) Beh.*

Definition 2.3.2 (Constraint Qualification)
(In der Vorlesung: Definition 2.3.3)
Seien $h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i \in I, j \in J$ und sei $\bar{x} \in M[h, g]$.
Wir definieren nun drei Bedingungen:

1. *Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $Dh_i(\bar{x})\xi = 0, i \in I$ und $Dg_j\xi \geq 0, j \in J$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Abbildung $x \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$ mit $x(0) = \bar{x}, x(t) \in M[h, g]$ für $t \in [0, \varepsilon)$ und $\frac{dx(0)}{dt} = \xi$.*

2. *(Mangasarian-Fromovitz) Die Gradienten $Dh_i(\bar{x}), i \in I$ sind linear unabhängig und es existiert ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $Dh_i(\bar{x})\xi = 0, i \in I$ und $Dg_j(\bar{x})\xi > 0 \forall j \in J_0(\bar{x})$.*

3. *(Slater) Die $h_i, i \in I$ sind affin-linear. $J = J^l \cup J^{nl}, J^l \cap J^{nl} = \emptyset$, so dass g_j affin linear ist für $j \in J^l$ und $-g_j$ konvex ist für $j \in J^{nl}$.*
   Es existiert ein $x^* \in M[h,g]$ mit $g_j(x^*) > 0 \forall j \in J^{nl}$.

SATZ 2.3.3
(In der Vorlesung: Satz 2.3.4)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i \in I, j \in J$.
Sei $\bar{x} \in M[h,g]$ ein lokales Minimum von $f|_{M[h,g]}$.
Gilt eine der drei Bedingungen aus 2.3.2, so ist $\bar{x}$ ein KKT-Punkt.

BEWEIS SATZ 2.3.2
Bedingung

1 gilt in $\bar{x}$: Das System

$$\begin{gathered} Df(\bar{x})\xi < 0 \\ Dh_i(\bar{x})\xi = 0, i \in I \\ Dg_j(\bar{x})\xi \geq 0, j \in J_0(\bar{x}) \end{gathered}$$

ist nicht lösbar.
$\Rightarrow$ Beh. mit dem Satz aus MOI.
Bedingung 2 golt in $\bar{x}$, dann folgt mit Satz 2.3.1: $\exists \lambda \geq 0; \lambda_i, i \in I; \mu_j, j \in J_0(\bar{x})$ mit

$$\ldots$$

Da die $Dh_i, i \in I$ linear unabhängig sind, sind nicht alle der Koeffizienten $\lambda; \mu_j, j \in J_0(\bar{x})$ gleich 0.
Angenommen $\lambda = 0 \Rightarrow \exists \tilde{j} \in J_0(\bar{x}) : \mu_{\tilde{j}} > 0$.

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j^T(\bar{x})\xi \geq \mu_{\tilde{j}} Dg_{\tilde{j}}^T(x)\xi > 0 \text{ Wid.}$$

$\Rightarrow \bar{x}$ ist KKT-Punkt.
Bedingung 3 gilt in $\bar{x}$:
Die folgenden zwei Systeme sind nicht gleichzeitig lösbar:

$$Df(\bar{x})\xi < 0$$

$$\begin{array}{rc} Dh_i(\bar{x})\xi = 0 & i \in I \\ Dg_j(\bar{x})\xi \geq 0 & j \in J_0(\bar{x}) \cap J^l \\ Dg_j(\bar{x})\xi > 0 & j \in J_0(\bar{x}) \cap J^{nl} \end{array}$$

Ist $J_0(\bar{x}) \cap J^{nl} = \emptyset$, so folgt die Behauptung aus MOI.
Sei daher $J_0(\bar{x}) \cap J^{nl} \neq \emptyset$.
Beh.: $\xi := x^* - \bar{x}$ löst das zweite System.
Dazu: $j \in J_0(\bar{x}) \cap J^{nl}$:

$$-\underbrace{g_j(x^*)}_{>0} - (\underbrace{-g_j(\bar{x})}_{=0}) \geq -Dg_j(\bar{x})(\underbrace{x^* - \bar{x}}_{=\xi}) \Rightarrow Dg_j(\bar{x})\xi > 0$$

$$
\begin{aligned}
i \in I, h_i(x) = a_i^T x + \beta_i \Rightarrow Dh_i(\bar{x}) = a_i^T, \\
h_i(x^*) = h_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow a_i^T(x^* - \bar{x}) = 0 \Rightarrow Dh_i(\bar{x})(x^* - \bar{x}) = 0 \\
j \in J_0(\bar{x}) \cap J^l : g_j(x) = b_j^T x + \gamma_j \Rightarrow Dg_j(\bar{x}) = b_j^T \\
\left.\begin{array}{r} g_j(x^*) \geq 0 \\ g_j(\bar{x}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Dg_j(\bar{x})\xi \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Beh. wiederum mit dem Satz aus MOI ($\leadsto$ der Koeff von $Df(\bar{x}) > 0$!) $\Rightarrow \bar{x}$ ist KKT-Punkt.

2.4 Lagrange-Dualität und Sattelpunkte

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $f, h_i, g_j : X \to \mathbb{R}; i \in I, j \in J$.
Zu dem primalen Problem

$$\inf\{f(x)|h(x) = 0, g(x) \geq 0, x \in X\} \tag{2.5}$$

betrachtet man das Lagrange-Duale Problem

$$\sup\{\Theta(\lambda, \mu)|\mu \geq 0\} \tag{2.6}$$

wobei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{|I|})^T, \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{|J|})^T$ und

$$\Theta(\lambda, \mu) = \inf\{L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x)|x \in X\}$$

Sei $x \in X$ mit $h(x) = 0, g(x) \geq 0$ und sei $\mu \geq 0$, so gilt

$$\Theta(\lambda, \mu) \leq L(x, \lambda, \mu) \leq f(x)$$

$\Rightarrow$ (Schwache Dualität)

$$\inf\{f(x)|h(x) = 0, g(x) \geq 0, x \in X\} \geq \sup\{\Theta(\lambda, \mu)|\mu \geq 0\}$$

Bemerkung 2.4.1 (Geometrische Interpretation)
(In der Vorlesung: Bemerkung 2.4.1)
Sei $|I| = 0, |J| = 1$. Sei $S = \{(y, z)|\exists x \in X : y = g(x), z = f(x)\}$
Sei $\mu = \mu_1 \geq 0$ fest gewält.

02.07.2004

Lemma 2.4.2
(In der Vorlesung: Lemma 2.4.2)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ konvex und seien $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{|I|}$ affin linear und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{|J|}$ konkav.
Hat das System

$$(S_1) : \alpha(x) < 0; h(x) = 0; g(x) \geq 0; x \in X$$

keine Lösung, so hat das System

$$
\begin{aligned}
(S_2) : \quad \mu_0\alpha(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x) \geq 0 \forall x \in X; \\
(\mu_0, \mu) \geq 0; (\mu_0, \lambda, \mu) \neq 0
\end{aligned}
$$

eine Lösung.
Hat das Sytem (S_2) eine Lösung mit $\mu_0 > 0$,so hat das System (S_1) keine Lösung.

Beweis Lemma 2.4.1

Sei

$$\Delta = \{(p,q,r)|p > \alpha(x); q \leq g(x); r = h(x) \text{ für ein } x \in X\}$$

Beh.: Δ ist konvex.
Dazu: Seien $(p_i, q_i, r_i) \in \Delta, i = 1,2$ und $\nu \in (0,1)$.

$$\Rightarrow x_1, x_2 \in X : \left.\begin{array}{rcl} p_i & > & \alpha(x_i) \\ q_i & \leq & g(x_i) \\ r_i & = & h(x_i) \end{array}\right\} i = 1,2$$

$$\Rightarrow (\mu p_1 + (1-\mu)p_2) > \mu\alpha(x_1) + (1-\mu)\alpha(x_2) \geq \alpha(\underbrace{\mu x_1 + (1-\mu)x_2}_{\in X, \text{ da } X \text{ konv}})$$

analog folgt

$$\mu(p_1, q_1, r_1) + (1-\mu)(p_2, q_2, r_2) \in \Delta \Rightarrow \Delta \text{ konvex}$$

Damit wäre die Behauptung bewiesen.
Besitzt (S_1) keine Lösung, so gilt $(0,0,0) \notin \Delta$.
$\Rightarrow \exists(\mu_0, \lambda, \mu) \neq 0$ *mit*

$$\mu_0 p - \lambda^T r - \mu^T q \geq 0 \forall (p,q,r) \in \bar{\Delta}$$

Sei $x \in X$ beliebig

$$\left(\lim_{p \to \infty}\right) \Rightarrow \mu_0 \geq 0$$

$$\left(\lim_{q \to -\infty}\right) \Rightarrow \mu \geq 0$$

Da $(p,q,r) = (\alpha(x), g(x), h(x)) \in \bar{\Delta}$, folgt

$$\mu_0\alpha(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x) \geq 0$$

Sei $(\mu_0, \lambda, \mu) \neq 0$ mit $(\mu_0, \mu) \geq 0, \mu_0 > 0$ eine Lösung von (S_2), d.h.

$$\mu_0\alpha(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x) \geq 0 \forall x \in X$$

Sei $x \in X$ mit $h(x) = 0, g(x) \geq 0$.

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \mu_0\alpha(x) - \mu^T g(x) \geq 0 \\ \Rightarrow & \alpha(x) \geq 0 \\ \Rightarrow & (S_1) \text{ hat kine Lösung.} \end{array}$$

Satz 2.4.3

(In der Vorlesung: Satz 2.4.3)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ konvex. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{|I|}$ affin linear und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{|J|}$ konkav.
Es existiert ein $x_0 \in X$ mit $h(x_0) = 0, g(x_0) > 0$ und $0 \in \Im(h(X))$.
Dann gilt

es gibt keine Dualitätslücke

$$\inf\{f(x)|h(x) = 0, g(x) \geq 0; x \in X\} = \sup\{\Theta(\lambda,\mu)|\mu \geq 0\}$$

Ist das Infinum endlich und wird in $\bar{x}$ angenommen, so wird das Supremum in einem Punkt $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ mit $\bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0$ angenommen.

Beweis Satz 2.4.1
Sei

$$\gamma = \inf\{f(x)|h(x) = 0, g(x) \geq 0; x \in X\} \overset{\exists x_0}{\Rightarrow} \gamma < \infty$$

Ist $\gamma = -\infty$, *so folgt die AUssage. Also sei* $-\infty \neq \gamma \neq \infty$.
$\Rightarrow$ *Das System*

$$f(x) - \gamma < 0; h(x) = 0; g(x) \geq 0, x \in X$$

hat keine Lösung.
$\overset{(2.4.2)}{\Rightarrow} \exists(\mu_0, \lambda, \mu) \neq 0, (\mu_0, \mu) \geq 0$ *mit*

$$\mu_0(f(x) - \gamma) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x) \geq 0 \forall x \in X$$

Ann.: $\mu_0 = 0$
Dazu:

$$-\underbrace{\lambda^T h(x_0)}_{=0} - \underbrace{\mu^T}_{\geq 0} \underbrace{g(x_0)}_{>0} \geq 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^T h(x) \geq 0 \forall x \in X$$

Da $0 \in \Im(h(X)) \exists r > 0$ *mit* $+r\lambda \in h(X)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & -\lambda^T(r\lambda) = -r\,|\lambda|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \Rightarrow \quad & (\mu_0, \lambda, \mu) = 0 \text{ Widerspruch} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - \frac{1}{\mu_0}\lambda^T h(x) - \frac{1}{\mu_0}\mu^T g(x) \geq \gamma \forall x \in X \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \Theta(\frac{1}{\mu_0}\lambda, \frac{1}{\mu_0}\mu) \geq \gamma \\ \Rightarrow \quad & \inf\{f(x)|x \in X, h(x) = 0, g(x) \geq 0\} = \sup\{\Theta(\lambda, \mu)|\mu \geq 0\} \end{aligned}$$

Sei $\bar{x}$ *optimale Lösung von (P 2.5).*

$$(f(x) = \gamma) \quad \overset{(2.7)}{\Rightarrow} \quad \gamma - \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\lambda^T 0}_{=0} - \frac{1}{\mu_0}\mu^T g(\bar{x}) \geq \gamma$$

$$\Rightarrow \quad \text{Behauptung mit } (\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (\frac{1}{\mu_0}\lambda, \frac{1}{\mu_0}\mu)$$

Definition 2.4.4 (Sattelpunkt)
(In der Vorlesung: Definition 2.4.4)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $f, h_i, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I, j \in J$.
Der Vektor $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ mit $\bar{x} \in X, \bar{\mu} \geq 0$ heißt Sattelpunkt der Lagrangefunktion, falls

$$L(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \forall x \in X \forall (\lambda, \mu) \text{ mit } \mu \geq 0$$

Satz 2.4.5
(In der Vorlesung: 2.4.5)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $f, h_i, g_j \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I, j \in J$.
Der Vektor $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ mit $\bar{x} \in X, \bar{\mu} \geq 0$ ist genau dann Sattelpubkt der Lagrangefunktion, wenn

1. $L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \inf\{L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) | x \in X\}$
2. $h(\bar{x}) = 0, g(\bar{x}) \geq 0$
3. $\bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0$

Weiterhin ist $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ genau dass Sattelpunkt der Lagrangefunktion, wenn $\bar{x}$ und $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ die Probleme P und D optimal lösen und $f(\bar{x}) = \Theta(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$.

Beweis Satz 2.4.2
Sei $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ Sattelpunkt $\overset{(2.4.4)}{\Rightarrow}$ 1.

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}) - \bar{\lambda}^T h(\bar{x}) - \bar{\mu}^T g(x) \overset{(Def)}{\geq} f(\bar{x}) - \lambda^T h(\bar{x}) - \mu^T g(\bar{x}) \forall (\lambda, \mu), \mu \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\lambda \text{ bel }) \quad & h(\bar{x}) = 0 \\ \Rightarrow (\mu \geq 0 \text{ bel }) \quad & g(\bar{x}) = 0 \\ \Rightarrow (\mu = 0) \quad & -\bar{\mu}^T g(\bar{x}) \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & \bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0 \end{aligned}$$

Erfülle $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ mit $\bar{x} \in X, \bar{\mu} \geq 0$ die Bedingungen 1., 2., 3.

$$\begin{aligned} 1. \Rightarrow \quad & L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \forall x \in X \\ & L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x}) - \bar{\lambda}^T h(\bar{x}) - \bar{\mu}^T g(\bar{x}) \overset{2.,3.}{=} f(\bar{x}) \\ & \overset{2.}{\geq} f(\bar{x}) - \lambda^T h(\bar{x}) - \mu^T g(\bar{x}) = L(\bar{x}, \lambda, \mu) \forall \mu \geq 0 \end{aligned}$$

ALso ist $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ ist Sattelpunkt der Lagrangefunktion.
(Rest nächste Übung)

Satz 2.4.6
(In der Vorlesung: Satz 2.4.6)
Seien $f, h_i, g_j \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $i \in I, j \in J$.
Sei $\bar{x}$ ein KKT-Punkt, d.h. $\bar{x} \in M[h, g]$ und $\exists \bar{\lambda}, \bar{\mu} \geq 0$ mit

$$Df(\bar{x}) = \bar{\lambda}^T Dh(\bar{x}) + \bar{\mu}^T Dg(\bar{x}); \bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0$$

Seien $f_i - g_j, j \in J_0(\bar{x})$ konvex in $\bar{x}$ (siehe Beweis) und $h_i, i \in I$ affin linear. Dann ist $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ ein Sattelpunkt der LF, so ist $\bar{x} \in M[h, g]$ und $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ efüllt die KKT-Bedingung.

Beweis Satz 2.4.3
Sei $\bar{x}$ KKT-Punkt, $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \geq 0$
$f_i - g_j, j \in J_0(\bar{x})$ konvex in $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + Df(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \forall x \in \mathbb{R}^n \\ -g_j(x) &\geq -g_j(\bar{x}) - Dg_j(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall j \in J_0(\bar{x}) \\ h_i(x) &= h_i(\bar{x}) + Dh_i(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \forall x \in \mathbb{R}^n \forall i \in I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(x,\bar{\lambda},\bar{\mu}) &= f(x) - \bar{\lambda}^T h(x) - \bar{\mu}^T g(x) \\ &\geq f(\bar{x}) - \bar{\lambda}^T h(\bar{x}) - \bar{\mu}^T g(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \\ L(\bar{x},\lambda,\mu) &= f(\bar{x}) - \lambda^T h(\bar{x}) - \mu^T g(\bar{x}) \\ &\leq f(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \\ \Rightarrow & \quad (\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \text{ Sattelpunkt} \end{aligned}$$

(Rest Übung)

06.07.2004

2.5 Subdifferential

Definition 2.5.1 (Subgradient)
(In der Vorlesung: Definition 2.5.1)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist ein Subgradient *von f in $\bar{x}$, falls $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x-\bar{x}) \forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt.*
Das Subdifferential *$\partial f(\bar{x})$ von f in $\bar{x}$ ist definiert als die Menge aller Subgradienten von f in $\bar{x}$. Man nennt f* subdifferenzierbar *in $\bar{x}$, falls $\partial f(\bar{x}) \neq \emptyset$.*

Beispiel 2.5.2
$f(x) = |x|$

$$\partial f(\bar{x}) = \begin{cases} \{1\}, & \bar{x} > \\ [-1,1], & \bar{x} = 0 \\ \{-1\}, & \bar{x} < 0 \end{cases}$$

Satz 2.5.3
(In der Vorlesung: Satz 2.5.2)
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ subdifferenzierbar in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, so ist $\partial f(\bar{x})$ konvex und kompakt.

Beweis Satz 2.5.1
zu $\partial f(\bar{x})$ konvex:
Seien $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(\bar{x}), \lambda \in (0,1)$

$$\Rightarrow f(x) \geq \begin{Bmatrix} f(\bar{x}) + \xi_1^T(x-\bar{x}) \\ f(\bar{x}) + \xi_2^T(x-\bar{x}) \end{Bmatrix} \forall x \begin{matrix} \cdot\lambda \\ \cdot(1-\lambda) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) + \left(\underbrace{\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2}_{\in \partial f(\bar{x})} \right)^T (x-\bar{x}) \forall x \Rightarrow \partial f(\bar{x}) \text{ konvex.}$$

$\partial f(\bar{x})$ kompakt:
Sei $(\xi_k)_{k\geq 0}$ Folge in $\partial f(\bar{x})$ mit $\xi_k \to \xi$.

$$\forall k \forall x : f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi_k^T(x - \bar{x}) \tag{2.8}$$

$\xi_k^T(x - \bar{x})$ ist stetig in $\xi_k \Rightarrow \partial f(\bar{x})$ abgeschlossen.

$$\overset{2.8}{\Rightarrow} f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$$

Noch zu zeigen: $\partial f(\bar{x})$ ist beschränkt.
Dazu: Sei $\xi_k)_{k\geq 1}$ Folge in $\partial f(|x|)$ mit $|\xi_k| \to \infty, k \to \infty$.
OBdA *$|\xi_k| \neq 0 \forall k$ und $\frac{\xi_k}{|\xi_k|} \to \bar{\xi}, k \to \infty$*

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\xi_k^T \bar{\xi}}{|\xi_k|} = \bar{\xi}^T \bar{\xi} = 1$$

$$\Rightarrow f(\bar{x} + \bar{\xi})(\in \mathbb{R}) \geq f(\bar{x})(\in \mathbb{R}) + |\xi_k| \underbrace{\frac{\xi_k^T}{|\xi_k|}\bar{\xi}}_{\to 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |\xi_k| \neq \infty \mathit{Wid.} \Rightarrow \partial f(\bar{x}) \text{ beschränkt.}$$

Satz 2.5.4
(In der Vorlesung: Satz 2.5.3)
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, so ist f überall subdifferenzierbar.

Beweis Satz 2.5.2
Sei

$$\overline{\mathrm{Epi}}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | y = f(x)\}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x) - y$ ist konvex und damit nach Satz ??? stetig.
$\Rightarrow \overline{\mathrm{Epi}}(f)$ offen (das Urbild einer offenen Menge unter stetiger Abbildung) und konvex.
$\Rightarrow (\overline{\mathrm{Epi}}(f), (\bar{x}, f(\bar{x})))$ (MOI) $\exists(\xi, \xi_{n+1})$ mit

$$\xi^T x + \xi_{n+1} y > \xi^T \bar{x} + \xi_{n+1} f(\bar{x}) \forall (x, y) \in \overline{\mathrm{Epi}}(f)$$

$$\Rightarrow \xi^T x + \xi_{n+1} f(x) \geq \xi^T \bar{x} + \xi_{n+1} f(\bar{x}) \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ann.: $\xi_{n+1} = 0 \Rightarrow \xi^T x > \xi^T \bar{x} \forall x \in \mathbb{R}^n$
Ann.: $\xi_{n+1} < 0 \Rightarrow (\lim_{y\to\infty})$
in Anführungszeichen$\Rightarrow \xi_{n+1} > 0$ und Division durch ξ_{n+1} liefert das Ergebnis.

Kapitel 3

Optimierungsverfahren

3.1 Abstiegsverfahren

DEFINITION 3.1.1
(In der Vorlesung: Definition 3.1.1)
Ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ *ist eine Abstiegsrichtung für* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *im Punkt* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *falls* $Df(\bar{x})d < 0$ *ist.*

ALGORITHMUS 3.1.2 (ABSTIEGSMETHODE)
(In der Vorlesung: Algorithmus 3.1.2)
Gegeben seien $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), x_0 \in \mathbb{R}^n$ *und* $\varepsilon > 0$.

1. $k \leftarrow 0$
2. *Falls* $\|Df(x_k)\|_2 \geq \varepsilon$, *gehe zu Schritt 3, onst zu Schritt 4.*
3. *Wähle eine Abstiegsrichtung* d_k *von* f *in* x_k.
   Bestimme die Lösung t_k *für* $\min_{t \geq 0} f(x_k + td_k)$
   Setze

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & \leftarrow & x_k + t_k d_k \\ k & \leftarrow & k+1 \end{array}$$

   Gehe zu Schritt 2

4. *Gebe* x_k *aus.*

SATZ 3.1.3
(In der Vorlesung: Satz 3.1.3)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Wählt man* $d_k = -\frac{D^T f(x_k)}{\|Df(x_k)\|_2}$ *in Schritt 3 von Algorithmus 3.1.2 („Methode des stärksten Abstiegs")und gilt* $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$ *(„*$\varepsilon := 0$*", d.h. von Schritt 2 gehe imme rzu Schritt 3), so folgt* $Df(\bar{x}) = 0$.

BEWEIS SATZ 3.1.1
$x_k \to \bar{x} \Rightarrow Df(x_k) \to Df(\bar{x}) \Rightarrow Df(x_{k+1}) - Df(x_k) \to 0$
Es gilt (Übung) $Df(x_{k+1})D^T f(x_k) = 0 \forall k \geq 0$
$\Rightarrow 0 \leq Df(x_k) = Df^T(x_k) = Df(x_k)(Df(x_k) - Df(x_{k+1}))^T \to 0$
$\lim_{k\to\infty} Df(x_k) = Df(\bar{x}) = 0$

DEFINITION 3.1.4
Seien $x_k \in \mathbb{R}^n, k \geq 0$ *mit* $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$

1. *Existieren* $0 \leq C < 1$ *und* $k \in \mathbb{N}$, *so dass* $\|x_{n+1} - \bar{x}\|_2 \leq C \|x_2 - \bar{x}\|_2$ *für alle* $n \geq k$, *so sagt man, dass* $(x : k)_{k\geq 0}$ *linear gegen* $\bar{x}$ *konvergiert.*

2. *Gilt* $\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-\bar{x}\|_2}{\|x_k-\bar{x}\|_2} = 0$, *so sagt man, dass* $(x : k)_{k\geq 0}$ *superlinear gegen* $\bar{x}$ *konvergiert.*

3. *Existiert ein* $x \geq 0$, *so dass* $\|x_{k+1} - \bar{x}\|_2 \leq C \|x_k - \bar{x}\|_2^2 \forall k \geq 0$, *so sagt man, dass* $x_k)_{k\geq 0}$ *quadratisch gegen* $\bar{x}$ *konvergiert.*

DEFINITION 3.1.5
(In der Vorlesung: Definition 3.1.5)
Eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *heißt* uniform konvex, *falls ein* $m > 0$ *existiert, so dass*

$$\xi^T D^2 f(x)\xi \geq m \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

mit $\|\xi\|_2 = 1$ *gilt.*

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uniform konvex.
Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ das globale Minimum von f.
Sei $x_0 \neq \bar{x}$. Für $k \geq 0$ setze $x_{k+1} := x_k - \lambda D^T f(x_k)$
für ein festes $\lambda > 0$.
OBdA sie $x_k \neq \bar{x} \forall k \geq 1$.
Sei

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - \bar{x}\|_2 \leq \|x_0 - \bar{x}\|_2\}$$

SATZ 3.1.6
(In der Vorlesung: Satz 3.1.6)
Unter obigen Vorraussetzungen folgt, dasss die FOlge $(x_k)_{x\geq 0}$ *linear gegen* $\bar{x}$ *konvergiert, falls* λ *klein genug (s.u.) gewählt wird.*

BEWEIS SATZ 3.1.2
$\exists \underline{m}, \bar{m}$ *mit*

$$0 < \underline{m} \leq \xi^T D^2 f(x)\xi \leq \bar{m} \forall x \in \mathcal{B}, \xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\|_2 = 1$$

Sei i *fest:* $\Psi(t) := D^T f(\bar{x} + t(x_i - \bar{x}))$
$\Psi(0) = D^t f(\bar{x}) = 0, \Psi(1) = D^T f(x_i)$

$$\Psi(t) = \Psi(0) + \int_0^t \frac{d\Psi(\tau}{d\tau} d\tau = \underbrace{\Psi(0)}_{=0} + \int_0^t D^2 f(\bar{x} + \tau(x_i - \bar{x}))(x_i - \bar{x}) d\tau$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|x_{i+1}-\bar{x}\|_2 &= \left\|x_i - \lambda D^T f(x_i) - \bar{x}\right\|_2 \\
&= \left\|(x_i-\bar{x}) - \lambda \int_0^1 D^2 f(\bar{x}+\tau(x_i-\bar{x}))(x_i-\bar{x})d\tau\right\|_2 \\
&= \left\|\int_0^1 (I - \lambda D^2 f(\bar{x}+\tau(x_i-\bar{x}))(x_i-\bar{x}))d\tau\right\|_2 \\
&\leq \|x_i-\bar{x}\|_2 \int_0^1 \left\|I - \lambda D^2 f(\bar{x}+\tau(x_i-\bar{x}))\right\|_2 d\tau,
\end{aligned}$$

wobei

$$\|A\|_2 := \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

Ist A *symmetrisch* $\Rightarrow \exists \mathcal{U}, \mathcal{U}^T\mathcal{U} = A, D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \left\|\mathcal{U}^T D(\underbrace{\mathcal{U}x}_{=y})\right\|_2 \leq \sup_{\|y\|_2=1} \left\|\mathcal{U}^T D y\right\|_2 \\
&= \left\|\mathcal{U}^T D\right\|_2 \leq \left\|\mathcal{U}^T\right\|_2 \|D\|_2 = \|D\|_2 = \max_i |\lambda_i|
\end{aligned}$$

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *die EW von* $D^2 f(x)$*, so sond* $1-\lambda\alpha_1, \dots, 1-\lambda\alpha_n$ *die EW von* $I - \lambda D^2 f(x)$*.*

$$\underline{m} \leq \min_{\|\xi\|_2=1} \xi^T D^2 f(x)\xi \overset{\text{Üb}}{=} \min_{1\leq i\leq n} \alpha_i \leq \max_{1\leq i\leq n} = \max_{\|\xi\|_2=1} \xi^T D^2 f(x)\xi \leq \bar{m} \forall x \in \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\|I - \lambda D^2 f(\underbrace{\bar{x}+\tau(x_i-\bar{x})}_{\in\mathcal{B}})\right\|_2 d\tau \\
\leq\ & \int_0^1 d\tau \sup_{x\in\mathcal{B}} \left\|I - \lambda D^2 f(x)\right\|_2 \\
\leq\ & \sup_{x\in\mathcal{B}} \max_{1\leq i\leq n} \|1 - \lambda\alpha_i(x)\|_2 \\
\leq\ & \sup_{x\in\mathcal{B}} \max\{\left|1 - \lambda \min_{1\leq i\leq n} \alpha_i(x)\right|, \left|1 - \lambda \max_{1\leq i\leq n} \alpha_i(x)\right|\} \\
\leq\ & \max\{|1-\lambda\underline{m}|, |1-\lambda\bar{m}|\} =: q(\lambda)
\end{aligned}$$

Gilt

$$\lambda \in (0, \frac{2}{m}),$$

so folgt $q(\lambda) < 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|x_{i+1}-\bar{x}\|_2 \leq q(\lambda)\|x_i-\bar{x}\|_2 \leq \|x_0-\bar{x}\|_2 \Rightarrow x_{i+1} \in \mathcal{B} \\
&\Rightarrow x_i, i \geq 0, \in \mathcal{B} \textit{ und } \|x_{i+1}-\bar{x}\|_2 \leq q(\lambda)\|x_i-\bar{x}\|_2 \forall i \geq 0 \\
&\Rightarrow (x_i) \textit{ konvergieren linear gegen } \bar{x}
\end{aligned}$$

09.07.2004

Wdh.

3.2 Newtonverfahren

Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\bar{x}$ lpkales Minimum von f, so folgt $Df(\bar{x}) = 0$.
$\rightsquigarrow$ Idee: Suche Minimum von f als Nullstelle von Df.
Sei daher $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ist $F(x_o) \neq 0$, so ist wegen $F(x) \sim F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0)$ der Punkt $x_1 := x_0 - DF^{-1}(x_0)F(x_0)$ ein natürlicher Kanidat für eine Nullstelle von F.
Beim Newton-Verfahren setzt man also für $i \geq 0$:

$$x_{i+1} = x_i + DF^{-1}(x_i)F(x_i)$$

Satz 3.2.1 (Newtonverfahren)
(In der Vorlesung: Satz 3.2.1)
Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Seien $F(\bar{x}) = 0$ und $DF(\bar{x})$ invertierbar für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Ist $\|x_0 - \bar{x}\|_2$ klein genug, so konvergiert die Folge $(x_k)_{k>0}$ quadratisch gegen $\bar{x}$.

Beweis Satz 3.2.1
Sei $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, f_i \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), f_i(\bar{x}) = 0 \forall 1 \leq i \leq n$.

$$\begin{aligned} f_i(x) &= Df_i(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_2^2) \\ Df_i(x) &= Df_i(\bar{x}) + (x - \bar{x})^T D^2 f_i(\bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Df_i(x)(x - \bar{x}) - f_i(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T D^2 f_i(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_2^2)$$

Sei $\beta_i := 1 + \max_{\|\alpha\|_2 = 1} \left|\alpha^T D^2 f_i(\bar{x})\alpha\right|$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \forall 1 \leq i \leq n \exists \eta_i > 0 : |Df_i(x)(x - \bar{x}) - f_i(x)| \leq \beta_i \|x - \bar{x}\|_2^2 \forall \|x - \bar{x}\|_2 \leq \eta_i \\ &\Rightarrow \quad |DF(x)(x - \bar{x}) - F(x)| \leq \beta \|x - \bar{x}\|_2^2 \forall \|x - \bar{x}\|_2 \leq \eta \end{aligned}$$

für $\beta > 1$ und $\eta > 0$.
Da $\det$ eine stetige Abbildung ist, $\exists \delta : \det(DF(x) \neq 0 \forall \|x - \bar{x}\|_2 \leq \delta$.
Setze $H(x) := DF^{-1}(x) \forall \|x - \bar{x}\|_2 \leq \delta$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_{i+1} - \bar{x}\|_2 &= \|x_i - H(x_i)F(x_i) - \bar{x}\|_2 \\ &= \|H(x_i)(DF(x_i)(x_i - \bar{x}) - F(x_i))\|_2 \\ &\leq \|H(x_i)\|_2 \|DF(x_i)(x_i - \bar{x}) - F(x_i)\|_2 \\ &\leq \|H(x_i)\|_2 \beta \|x_i - \bar{x}\|_2^2 \forall |x_i - \bar{x}| \leq \eta, \delta \end{aligned}$$

Da $\|H(x)\|_2$ stetig ist, $\exists \varepsilon > 0 : \|H(x)\|_2 \leq \gamma$ für $|x - \bar{x}| \leq \varepsilon$.
Ist $\|x_i - \bar{x}\|_2 \leq \min\{1, \frac{1}{\gamma\beta}, \varepsilon, \delta, \eta\}$, so folgt

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - \bar{x}\|_2 &\leq \gamma\beta \|x_i - \bar{x}\|_2^2 \text{ und} \\ &\leq \left\{ \begin{array}{ccc} \gamma\beta 1 \frac{1}{\gamma\beta} & = & 1 \\ \gamma\beta(\frac{1}{\gamma\beta})^2 & = & \frac{1}{\gamma\beta} \\ \gamma\beta\frac{1}{\gamma\beta}\varepsilon & = & \varepsilon \\ \gamma\beta\frac{1}{\gamma\beta}\delta & = & \delta \\ \gamma\beta\frac{1}{\gamma\beta}\eta & = & \eta \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

Beh. $(x_k)_{k\geq 0}$ *konvergiert quadratisch gegen* $\bar{x}$*, falls* $\|x_0 - \bar{x}\|_2 \leq \min\{1, \frac{1}{\gamma\beta}, \varepsilon, \delta, \eta\}$ *ist.*

3.3 Anwendung auf Optimierungsprobleme mit Nebenbedinungen

Wir haben in den obigen Abschnitten Iterationsverfahren der Form

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

kennen gelernt, wobei d_k als Abstiegsrichtung der zu minimierenden Funktion gewählt wurde.
Diese Abstiegsverfahren lassen sich zunächst scheinbar leicht auf Probleme mi Nebenbedingungen übertragen:
Wir betrachten z.B. ein Problem der Form

$$\min\{f(x)|g_j(x) \geq 0, j \in J\}$$

für $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), j \in J$.
Sei $x_0 \in M[g] = \{x|g_j(x) \geq 0 \forall j \in J\}$. Hat man $x_k \in M[g]$ für ein $k \geq 0$ bereits bestimmt, so wird nach Definition 2.0.7 und Satz 2.0.9 Vektoren $d_k \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Df(x_k)d_k < 0, Dg_j(x_k)d_k \geq 0, j \in J_0(x_k)$$

natürliche Kanidaten für zulässige „Abstiegsrichtungen“ und man bestimmt

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

so, dass

$$f(x_{k+1}) = f(x - k + t_k d_k) = \min\{f(x_k + t_k d_k)|t > 0, x_k + t_k d_k \in M[g]\} \quad (3.1)$$

Um die Funktionswerte von f möglichst schnell zu minimieren, kann man d_k dabei als Lösung des LP's

$$\begin{array}{ll} \min & Df(x_k)d_k \\ \text{s.t.} & Dg_j(x_k)d_k \geq 0 \forall j \in J_0(x_k) \\ & \|d_k\|_\infty \leq 0 \\ & (d_k \in [-1,1]^n) \end{array}$$

Dass diese natürliche Übertragung der Abstiegsverfahren nicht funktioniert, zeigt das Beispiel von Wolfe (Übung): Die Folge $(x_k)_{k\geq 0}$, die man so erhält konvergiert gegen ein x^*, das weder lokales Minimum, noch KKT-Punkt (Def. 2.1.3 ist.
Um das „Zigzagging“ zu vermeiden, schlugen Topkins und Veinott (1967) vor, die d_k's als Lösung des LP's

$$\begin{array}{lc} \min & z \\ \text{s.t.} & Df(x_k)d \leq z \\ & g_j(x_k)Dg_j(x_k)d \geq -zj \in J \\ & d \in [-1,1]^n \end{array} \quad (3.2)$$

SATZ 3.3.1 (TOPKINS UND VEINOLD 1967)
(In der Vorlesung: Satz 3.3.1)
Seien $f, g_j, j \in J$ wie oben. Werden die Folgen $(x_k)_{k\geq 0}$ gemäß 3.1 und3.1 bestimmt und konvergiert eine Teilfolge von $(x_k)_{k\geq 0}$ gegen ein $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, so ist $\bar{x} \in M[g]$ und es existieren $\mu_0, \mu_j \geq 0, j \in J_0(\bar{x})$ nicht alle gleich 0 mit

$$\mu_0 Df(\bar{x}) = \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x})$$

(vgl. Satz 2.3.1)

3.3.1 Lagrange Newton Methode

Sei $f, h_i (i \in I) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
Ist $\bar{x} \in M[h]$ ein KKT-Punkt von $f|_{M[h]}$ mit Lagrange Multiplikator $\bar{\lambda}$, so ist $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ Nullstelle der Funktion

$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D^T f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i D^T h_i(x) \\ -h_i(x), i \in I \end{pmatrix}$$

3.4 Subgradientenverfahren

In Abschnitt **??** haben wir zu einem gegebenen (primalen) Problem eon sigenanntes Lagrange-Duales Problem der Form

$$\begin{aligned} &\sup\{\Theta(\lambda, \mu) | \mu \geq 0\} \text{ mit} \\ \Theta(\lambda, \mu) = &\inf\{f(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x) | x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

betrachtet.
Unter gewissen Vorraussetzungen (vgl. Satz 2.4.3) war $f(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x)$ konvex und „opt$(P) = $ opt(D)“.
$\rightsquigarrow$ Motiviert: Min konvexer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.

ALGORITHMUS 3.4.1
(In der Vorlesung: Algorithmus 3.4.1)

1. *$k = 0$*

2. *Falls $0 \notin \partial f(x_k) \neq \emptyset$, gehe zu 3, sonst zu 4*

3. *Sei $g_k \in \partial f(x_k), d_k = -\frac{g_k}{\|g_k\|_2}$*
   Berechne Lösung t_k von $\min_{t\geq 0} f(x_k + t_k d_k)$
   Setze

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\leftarrow x_k + t_k d_k \\ k &\leftarrow k + 1 \end{aligned}$$

   gehe zu 2

4. *Fertig, gebe x_k aus.*

Bemerkung 3.4.2
(In der Vorlesung: Bemerkung 3.4.2)
Sei $d(x_1, x_2) = \max\{x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2, -2x_1 - 6\}$.
$\Rightarrow f$ *konvex.*

$$f(x_1, x_2) \overset{x_2=0}{\geq} \max\{x_1, -2x_1, -6\} \geq -1 = f(-2, 0)$$

$\Rightarrow (-2, 0)$ *ist eindeutiges globales Minimum von* f.
Sei $x_0 = (1, 2)$. *Es gilt* $g_0 = (1, 2) \in \partial f(x_0)$, *denn*

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2) = f(1, 2) \geq (1, 2) \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \\
\Leftrightarrow \quad & f(x_, x_2) \geq f(1, 2) + (x_1 - 1) + 2(x_2 - 2) = x_1 + 2x_2 \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\
& f(x_0 - tg_0) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \max\{5 - 5t, -3 - 3t, -8 + 2t\} \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & t_0 = -1, x_1 = x_0 - g_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& g_1 = (1 - 2) \in \partial f(x_1), \text{ denn} \\
& f(x_1, x_2) - f(0, 0) \geq (1, -2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & f(x_, x_2) > x_1 - 2x_2 \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\
& f(x_1 - tg_1) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = f(-t, 2t) = \max\{3t, -5t, -6 + 2t\} \geq 0 \\
& f(x_1) = 0 \\
\Rightarrow \quad & f(x_1 - tg_1) > f(x_1) \forall t \neq 0 \\
\Rightarrow \quad & d_1 = -\frac{g_1}{\|g_1\|_2}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *Der Algorithmus 3.4.1 würde nicht funktionieren.*
Aber:

$$\begin{aligned}
\left\|(x_1 - tg_1) - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -t - 2 \\ 2t \end{pmatrix}\right\|_2 &= \sqrt{(t-2)^2 + 4t^2} \\
&= \sqrt{5t^2 - 4t + 4}
\end{aligned}$$

$$\left\|x_1 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_2 \overset{t=0}{=} 2 > \sqrt{5t^2 - 4t + 4} \forall t 5t^2 - 4t < 0.0 < t < \frac{4}{5}$$

Für t *klein genug, liegt* $x_1 - tg_1$ *näher am globalen Minimum als* x_1.

Lemma 3.4.3
(In der Vorlesung: Lemma 3.4.3)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex und* $\bar{x}$ *ein globales Minimum von* f.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *mit* $f(x_0) > f(\bar{x})$ *und* $g_0 \in \partial f(x_0)$. *Sei* $d_0 = -\frac{g_0}{\|g_0\|}$ *und* $x_1 = x_0 + t_0 d_0$.
Dann gilt $d_0^T(\bar{x} - x_0) > 0$ *und*

$$\|x_1 - \bar{x}\|^2 \leq \|x_0 - \bar{x}\|^2 - t_0 d_0^T(\bar{x} - x_0) \forall 0 < t_0 \leq d_0^T(\bar{x} - x_0).$$

Beweis Lemma 3.4.1

$$f(\bar{x}) - f(x_0) \geq g_0^T(\bar{x} - x_0) \Rightarrow d_0^T(\bar{x} - x_0) \geq \frac{f(x_0) - f(\bar{x})}{\|g_0\|} > 0$$

$$\begin{aligned}
\|x_1 - \bar{x}\|^2 = ((x_0 - \bar{x}) + t_0 d_0)^T((x_0 \bar{x}) + t_0 d_0) &= \|x_0 - \bar{x}\|^2 - 2t_0 d_0^T(\bar{x} - x_0) + t_0^2 \underbrace{\|d_0\|^2}_{=1} \\
&\leq \|x_0 - \bar{x}\|^2 - t_0 d_0^T(\bar{x} - x_0)
\end{aligned}$$

Algorithmus 3.4.4 (Subgradientenverfahren)
(In der Vorlesung: Algorithmus 3.4.4)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex,* $x_0 \in \mathbb{R}^n, (t_k)_{k\geq 0}$ *mit* $t_k > 0 \forall k \geq 0$.

1. $k \leftarrow 0$
2. *Sei* $g_k \in \partial f(x_k)$
3. *Ist* $g_k = 0$, *so gebe* x_k *aus.*
4. $$\begin{aligned} x_{k+1} &\leftarrow x_k + t_k d_k \text{ für } d_k = -\frac{g_k}{\|g_k\|} \\ k &\leftarrow k+1 \end{aligned}$$

   Gehe zu 2.

Satz 3.4.5
(In der Vorlesung: Satz 3.4.5)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex und* $\bar{x}$ *ein globales Minimum von* f.
Sei $(t_k)_{k\geq 0}$ *mit* $t_k > 0, k \geq 0$ *so, dass* $\lim\limits_{k\to\infty} = 0$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$. *Dann gilt für die Folge* $x_0, x_1, \ldots,$ *die das Subgradientenverfahren liefert, dass*

$$\lim_{k\to\infty} \min\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)\} = f(\bar{x})$$

Beweis Satz 3.4.1
Ist $g_k = 0$ *für ein* k *(d.h.* $x_k = x_{k+1} = \ldots$*), so ist* x_k *nach Übung ein globales Minimum, denn*

$$f(x) - f(x_k) \geq 0^T(x - x_k) \Rightarrow f(x) \geq f(x_k) \forall x$$

$\Rightarrow$ *Beh.*
Sei daher $g_k \neq 0 \forall k \geq 0$.
Ann: $\exists \alpha : f(x_k) \geq \alpha > f(\bar{x}) \forall k \geq 0$
Da f *stetig ist,* $\exists \rho > 0 : f(\bar{x} + \rho d) \leq \alpha \forall \|d\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x_k^\rho := \bar{x} - \rho d_k \\
&\Rightarrow \quad f(x_k^\rho) \leq \alpha \leq f(x_k) \forall k \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \geq f(x_k^\rho) - f(x_k) a \geq g_k^T(x - k^\rho) = g_k^T(\bar{x} - x_k - \rho d_k) \\
&\Rightarrow \quad d_k^T(\bar{x} - x_k) \geq \rho \|d_k\|^2 = \rho \\
&\Rightarrow \quad \text{Falls } t_k < \rho : \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - t_k \rho
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ *mit* $t_k \leq \rho \forall k \geq K$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=K}^{N} &\leq \frac{1}{\rho} \sum_{k=K}^{N} \left(- \left\| x_{k+1} - \bar{x} \right\|^2 + \left\| x_k - \bar{x} \right\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \left(- \left\| x_{N+1} - \bar{x} \right\|^2 + \left\| x_K - \bar{x} \right\|^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{\rho} \left\| x_K - \bar{x} \right\|^2 \forall N \geq K \text{ Widerspruch}
\end{aligned}$$

Satz 3.4.6
(In der Vorlesung: Satz 3.4.6)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex und sei* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *so, dass*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq L \left\| x - \bar{x} \right\|$$

für ein festes $L > 0$ *und alle* $x \in \mathbb{R}^n$.
Wählt man im Subgradientenverfahren $t_k = \frac{f(x_k) - f(\bar{x})}{\|g_k\|}$, *so konvergiert* $(x_k)_{k \geq 0}$ *linear gegen* $\bar{x}$.

Beweis Satz 3.4.2

$$d_k^T (\bar{x} - x_k) \geq \frac{f(x_k) - f(\bar{x})}{\|g_k\|} > 0 \text{ (vgl. Lemma 3.4.3)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{(Lem 3.4.3)} \quad & \left\| x_k - \bar{x} \right\|^2 \leq \left\| x_k - \bar{x} \right\|^2 - t_k^2 \leq \left\| x - k - \bar{x} \right\|^2 \left(1 - \frac{L^2}{\left\| g_k \right\|^2} \right) \\
\Rightarrow \quad & \left\| x_k - \bar{x} \right\| \leq \left\| x_0 - \bar{x} \right\| \\
\Rightarrow \quad & \exists M : \left\| f(x_k) \right\| \leq M \\
\Rightarrow \quad & \exists M' : \left\| f(x_k - d_k) \right\| \leq M' \\
\Rightarrow \quad & \left\| g_k \right\|^2 = g_k^T (-d_k) \leq f(x_k - d_k) - f(x_k) \leq M' + M \forall k \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & \exists \alpha < 1 : \left(1 - \frac{L^2}{\left\| g_k \right\|^2} \right) \leq \alpha^2 \forall k \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & \left\| x_{k+1} - \bar{x} \right\| \leq \alpha \left\| x_k - \bar{x} \right\| \forall k \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Einige kombinatorische Optimierungsprobleme

4.1 Set Cover

PROBLEM 4.1.1 (SET COVER)
(In der Vorlesung: Problem 4.1.1)
Geg: Eine endliche Menge $\mathcal{U}, \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ *mit* $S_i \subseteq \mathcal{U} \forall 1 \leq i \leq k$, *Fkt* $c_\mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$.
Ges:

$$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ mit } \mathcal{U} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S \text{ so, dass}$$

$$c(\mathcal{S}') = \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S) \text{ minimal ist.}$$

Als LP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) x_S \\ s.t. \quad & \sum_{S : e \in S} x_S \geq 1 \forall e \in \mathcal{U} \\ & x_S \in \{0,1\} \forall S \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

20.07.2004

LEMMA 4.1.2
(In der Vorlesung: Lemma 4.1.6)

$$((y_e)_{e \in \mathcal{U}}, (z_s)_{s \in \mathcal{S}}) = ((\frac{\alpha_e}{H_n})_{e \in \mathcal{U}}, (\frac{\beta_s}{H_n})_{s \in \mathcal{S}})$$

ist zulässug für (D)$(n = |\mathcal{U}|)$

BEWEIS LEMMA 4.1.1
Fall 2 Der mod GA wählt S *aus.*
Zu dem Zeitpunkt, zu dem mod GA S *auswählt seien bereits* $0 \leq k' < k$

Elemente e von S r_e-mal überdeckt.

$$(\sum_{i=1}^{k} y_{e_i}) - z_S = \frac{1}{H_n}\{\sum_{i=1}^{k} \text{price}(e_i, r_{e_i}) - \sum_{i=k'+1}^{k} (\text{price}(e_i, r_{e_i}) - \text{price}(e_i, j_i))\}(4.1)$$

Wobei S das Element e_i genau zum j_i-ten Mal überdeckt ($i = k'+1, \dots, k$)

$$4.1 = \frac{1}{H_n}\left\{\sum_{i=1}^{k'} \text{price}(e_i, r_{e_i} + \mathcal{U}nderbrace\text{price}(e_i, j_i)_{c(S)}\right\}$$

Wie oben:

$$\text{price}(e_i, r_{e_i} \leq \frac{c(S)}{k-i+1} i = 1, \dots, k'$$

$$\Rightarrow 4.1 \leq \frac{1}{H_n}\{c(S)(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-k'+1(\geq 2)} + 1)\} \leq c(S)$$

4.2 Set Cover und „(randomized) rounding“

Sei $(\mathcal{U}, \mathcal{S}, c)$ eine Instanz von Set Cover und sei

$$\mathcal{F} = \max\{|\{S \in \mathcal{S} | e \in S\}| e \in \mathcal{U}|\}$$

die maximale Frequenz $|\{S \in \mathcal{S} | e \in S\}|$ eines $e \in \mathcal{U}$.

PROPOSITION 4.2.1
(In der Vorlesung: Proposition 4.2.1)
Ist $(x_S)_{S \in \mathcal{S}}$ eine optimale Lösung der LP-Relaxierung von Set COver, so ist

$$\mathcal{S}' = \{\in \mathcal{S} | x_S \geq \frac{1}{f}\}$$

ein Set COver für $(\mathcal{U}, \mathcal{S}, c)$, dessen Kosten höchstens f mal größer sind, als die minimalen Kosten eines Set Covers.

BEWEIS PROPOSITION 4.2.1
Sei $e \in \mathcal{U}$

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\sum_{\mathcal{U}nderbrace S:e \in S_{\leq f \text{ Summanden}}} x_S \geq 1 \\ \Rightarrow & \exists S, e \in S, x_S \geq \dfrac{1}{f} \\ \textit{und} & \mathcal{S}' \textit{ ist Set Cover} \end{array}$$

$$c(S') = \sum_{S:X_S \geq \frac{1}{f}} c(S) \leq f \sum_{S} c(S) x_S = f\,\text{OPT}_{(P)} \Rightarrow \textit{ Beh.}$$

Beispiel für Instanzen mit kleinem f: Vertex Cover

Problem 4.2.1 (Vertex Cover)
(In der Vorlesung: Problem 4.2.2)

Gegeben: Ein endlicher Graph $G = (V, E), |V| < \infty, ESubseteq \binom{V}{2}, c : V \to \mathbb{Q}^+$
Gesucht: Eine Menge $\mathcal{U}SubseteqV$ mit $f \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \forall f \in E$, so dass $c(\mathcal{U})$ minimal sind.

$$(E, \mathcal{S} = \{\mathcal{U}nderbrace\{f \in E | u \inf\}_{S_u} | u \in V\}, \mathcal{U}nderbracec_{c(S_u)=c(u)})$$

Randomized Rounding: Sei $(x_S)_{S\in\mathcal{S}}$ eine optimale Lösung der LP-Relaxierung von $(\mathcal{U}, \mathcal{S}, c)$
Idee: Interpretiere $o \leq x_S \leq 1$ als Wahrscheinlichkeiten.
$\rightsquigarrow$ Wähle $S \in \mathcal{S}$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit x_S aus.
Sei C die Menge der ausgewählten $S \in \mathcal{S}$.

$$\Rightarrow E[c(C)] = \sum_{S\in\mathcal{S}} c(S)x_S = \mathrm{OPT}_{(P)}$$

Sei $u \in \mathcal{U}$ und u gehöre genau zu den Mengen $S_1, \ldots, S_k$.

$$\begin{aligned} P[u \in \bigcup_{S\in C} S] &= 1 - P[u \neq \bigcup_{S\in C} S] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - x_{S_i}) \\ &\geq 1 - (1 - \frac{1}{k})^k \geq 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$\boxed{\sum_{i=1}^k x_{S_i} \geq 1 (1-p_i)(1-p_i) < (1 - \frac{p_i+p_i}{2})^2}$ Sei $\mathcal{S}'$ die Vereinigung von $d \log n$ unabhängig voneinander gewählten Mengen $C_1, \ldots, C_{d\log n}$. Sei d so gewählt, dass

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{e}\right)^{d\log n} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow\quad & P[u \notin \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S] \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{d\log n} \leq \frac{1}{4n} \\ \Rightarrow\quad & P[\mathcal{U} \neq \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S] \leq \sum_{u\in\mathcal{U}} P[u \notin \bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S \leq \frac{1}{4} \\ & E[c(\mathcal{S}')] \leq \sum_{i=1}^{d\log n} E[c(C_i)] = d\log n \,\mathrm{OPT}_{(P)} \\ \overset{(\text{Markov})}{\Rightarrow}\quad & P[c(\mathcal{S}') \geq 4d\log n\,\mathrm{OPT}_{(P)}] \leq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow\quad & P[\mathcal{U} \neq \bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S] \text{ oder } c(\mathcal{S}') \geq 4d\log n\,\mathrm{OPT}_{(P)}] \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zurück zu Vertex Cover $G = (V, E), c_V \to \mathbb{Q}_+$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{u \in V} c(u) x_u \\ \text{s.th.} \quad & x_u + x_v \geq 1 \forall uv \in E \end{aligned}$$

$$x_u \geq 0 \forall u \in V \qquad (P)$$

Satz 4.2.2 (Newhauser + Trotter)
(In der Vorlesung: Satz 4.2.3)
Sei $(x_u)_{u \in V}$ eine zulässige Lösung von (P). Sind nicht alle Komponenten von x aus $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$, dann ist x nicht-triviale Konvexkombination zweier zulässiger Lösungen von (P), d.h. alle Ecken der für (P) zulässigen Polyeders sind „halbganzzahlig“.

Beweis Satz 4.2.1

$$\begin{aligned} V_+ &= \{u \in V | \frac{1}{2} < x_u < 1\} \\ V_- &= \{u \in V | 0 < x_u < \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Ann: $V_+ \cup V_i \neq \emptyset$
Für $\varepsilon > 0$ sei

$$\begin{aligned} y_v &= \begin{cases} x_v + \varepsilon & v \in V_+ \\ x_v - \varepsilon & v \in V_- \\ x_v & \textit{sonst} \end{cases} \\ z_v &= \begin{cases} x_v - \varepsilon & v \in V_+ \\ x_v + \varepsilon & v \in V_- \\ x_v & \textit{sonst} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad y \neq x, z \neq x, x = \frac{1}{2}(y + z) \end{aligned}$$

Zeige: Für $\varepsilon > 0$ klein genug, sind y und z zulässig:
Sei $uv \in E$

$$\begin{aligned} x_u + x_v > 1 \\ x_u + x_v = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \textit{entweder} \quad & x_u = x_v = \frac{1}{2} \\ \textit{oder} \quad & \{x_u, x_v\} = \{0, 1\} \\ \textit{oder} \quad & x_u \in V_-, x_v \in V_+ \\ \textit{oder} \quad & x_u \in V_+, x_v \in V_- \end{aligned}$$

4.3 Set Cover und das Primal-Dual Schema

Seien

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad \min \quad & \sum_j c_j x_j \\ \text{s.th.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \geq b \forall i \\ & x_j \geq 0 \forall j \end{aligned}$$

$$\sum_j c_j x_j \geq \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) y_i = \sum_j (\sum_i a_{ij} y_i) x_j \geq \sum_i b_i y_i$$

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad \max \quad & \sum_i b_i y_i \\ \text{s.th.} \quad & \sum_i a_{ij} y_i \leq c_j \forall j \\ & y_i \geq 0 \forall i \end{aligned}$$

Relaxierte Complementary Slackness Bedingung:
$(x_j)_j, (y_i)_i$ sind optimale Lösungen von (P) und (D)

$$\begin{aligned} \forall j : x_j > 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_i a_{ij} y_i = c_j \\ \forall i : y_i > 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_j a_{ij} x_j = b_i \end{aligned}$$

Ralaxation:

$$\begin{aligned} \forall j : x_j > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{c_j}{\alpha} \leq \sum_i a_{ij} y_i \leq c_j \\ \forall i : y_i > 0 \quad &\Rightarrow \quad b_i \leq \sum_j a_{ij} x_j \leq \beta b_i \end{aligned}$$

für $\alpha, \beta \geq 1$.

Lemma 4.3.1
(In der Vorlesung: Lemma 4.3.1)
Erfüllen $(x_j)_j$ und $(y_i)_i$ die relaxierten CSB (wie oben), so gilt

$$\sum_j c_j x_j \leq \alpha\beta \sum_i b_i y_i$$

Beweis Lemma 4.3.1

$$\begin{aligned} \sum_j c_j x_j \quad &\leq \quad \alpha \sum_j (\sum_i a_{ij} y_i) x_j \\ \sum_i b_i y_i \quad &\geq \quad \frac{1}{\beta} \sum_i (\sum_j a_{ij} x_j) y_i \end{aligned}$$

23.07.2004

4.3.1 Primal-Dual Schema:

Ausgehend von einer nicht-zulässigen Lösung von (P) und einer zulässigen aber nicht optimalen Lösung von (D) (z.B. $x = 0, y = 0$) verbessert man iterativ die Zulässigkeit der primalen Lösung und die Optimalität der dualen Lösung. Wird die primale Lösung ständig ganzzahlig verändert und gelten am Ende die relaxierten Complementary Slackness Bedingungen, so erhält man nach Lemma 4.3.1 eine zulässige Lösung des (ILP), deren Wert um höchstens den Faktor $\alpha\beta$ vom optimalen Zielfunktionswert abweicht.

Beispiel 4.3.2 (Set Cover)
Sei $(\mathcal{U}, \mathcal{S}, c)$ eine Set Cover *Instanz und sei f die maximale Frequenz.*
Wir wählen $\alpha = 1, \beta = f$.
Die relaxierten Complementary Slackness Bedingungen lauten:

$$(P) \qquad \forall S \in \mathcal{S} : x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{e \in S} y_e = c(S)$$

Mengen $S \in \mathcal{S}$ mit $\sum\limits_{e \in S} y_e = c(S)$ heißen „voll".

$$(D) \qquad \forall e \in \mathcal{U} : y_e \neq 0 \Rightarrow 1 \leq \sum_{S : e \in S} x_S \leq f$$

Die Bedingung $\sum\limits_{S_e \in S} x_S \leq f$ gilt für alle $(x_S)_{S \in \mathcal{S}} \in \{0,1\}^{\mathcal{S}}$ aufgrund der Definition von f.

Algorithmus 4.3.3 (Primal-Dual Schema für Set Cover)
(In der Vorlesung: Algorithmus 4.3.2)

1. *Setze $x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$.*
2. *Solange noch nicht alle Elemente von $\mathcal{U}$ überdeckt sind, wähle ein $e \in \mathcal{U}$, das noch nicht überdeckt wurde, erhöhe den Wert y_e gerade soviel, dass eine Menge S mit $e \in S$ „voll" wird.*
   Füge zu dem aktuellen Set Cover *Kanidaten alle Mengen hinzu, die „voll" sind (d.h. setze $x_S = 1$).*
3. *Gebe x aus.*

Satz 4.3.4
(In der Vorlesung: Satz 4.3.3)
Der Algorithmus 4.3.3 liefert ein Set Cover*, dessen Kosten höchstens um den Faktor f größer sind als die minimalen Kosten.*

Bemerkung 4.3.5
(In der Vorlesung: Bemerkung 4.3.4)

$$
\begin{aligned}
& e_1 : y_{e_1} = 1, x_{[e_1,e_n]} = 1 \\
\rightarrow\ & e_2 : y_{e_2} = 1, x_{[e_2,e_n]} = 1 \\
\rightarrow\ & e_3 \\
& \ldots \\
\rightarrow\ & e_{n-1} \\
\rightarrow\ & e_{n+1} y_{e_{n+1}} = \varepsilon, x_{[alle]} = 1 \\
\rightarrow\ & c(\mathcal{S}') = n + \varepsilon
\end{aligned}
$$

c *(optimales* SET COVER*)* $= 1 + \varepsilon$
... Beispiel Multicut und Multicommodity Flow in Bäumen.

PROBLEM 4.3.6 (MINIMUM MULTICUT)
(In der Vorlesung: Problem 4.3.5)
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ *und* $c_e \in \mathbb{Q}^+ \forall e \in E$.
EIne Menge von Paaren von Ecken $\{\{s_1, t_1\}, \ldots, \{s_k, t_k\}\}$
mit $s_i \neq t_i \in V \forall 1 \leq i \leq k$.
Gesucht: EIne Menge $E' \subseteq$ *von Kanten, so dass für* $1 \leq i \leq k$ *im Graphen* $(V, E \setminus E')$ *kein Weg zwischen* s_i *und* t_i *verläuft, so dass* $c(E') = \sum_{e \in E'} c_e$ *minmal ist.* $\rightsquigarrow$ *Für jedes Paar* $\{s_i, t_i\}$ *und jeden Weg zwischen* s_i *und* t_i *muss* E' *mindestens eine Kante des Weges enthalten.*

Baum = kreisfreier zusammenhängender Graph
$\rightsquigarrow$ zwischen je zwei Ecken existiert immer (höchstens) ein Weg.
Sei für $1 \leq i \leq k$ P_i die Menge der Kanten des eindeutigen $s_i - -t_i$ Weges im Baum $G = (V, E)$.

$$
\rightsquigarrow (ILP) \quad
\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in E} c_e d_e \\
& s.th. \sum_{e \in P_i} d_e \geq 1 \forall 1 \leq i \leq k \\
& d_e \in \{0, 1\} \forall e \in E
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ Spezielle SET COVER Instanz
(„Überdecke die Wege P_i mit den Kanten e“)

$$
(P) \quad
\begin{aligned}
& \min \sum_{e} c_e d_e \\
& s.th. \sum_{e \in P_i} d_e \geq 1 \forall 1 \leq i \leq k \\
& d_e \geq 0 \forall e
\end{aligned}
$$

$$
(D) \quad
\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^{k} f_i \\
& s.th. \sim_{i: e \in P_i} f_i \leq c_e \forall e \in \mathcal{U} \\
& f_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq k
\end{aligned}
$$

Bemerkung 4.3.7
(In der Vorlesung: Bemerkung 4.3.6)

$$(ILD) \quad \begin{aligned} &\max \sum_i f_i \\ &s.th. \sum_{i:e \in P_i} f_i \le c_e \forall e \\ &f_i \in N_0 \forall 1 \le i \le k \end{aligned}$$

Problem 4.3.8 (Integer multicommodity flow)
(In der Vorlesung: Problem 4.3.7)
Gegeben: (wie bei Problem 4.3.6)
Gesucht: „Eine Menge von $s_i - - t_i$-Flüssen maximaler Gesamtstärke, die gemeinsam die Kantenkapazitäten nicht überschreiten und jeweils ganzzahlig sind“(für Bäume $\Leftrightarrow$ (ILD)).
$\alpha = 1, \beta = 2$
R.C.S.B.

$$(P) \quad \forall e \in E : d_e \neq 0 \Rightarrow \sum_{i:e \in P_i} f_i = c_e$$

$$(D) \quad \forall 1 \le i \le k : f_i \neq 0 \Rightarrow 1 \le \sum_{e \in P_i} d_e \le 2.$$

$\boxed{\text{Falls } \sum_{i:e \in P_i} f_i = c_e \text{ heißt } e \text{ „saturiert“}}$

Sei $G = (V, E), (c_e)_{e \in E}$ eine Instanz, d.h. G ist Baum.
Verwurzele den Baum in einer beliebigen Ecke. $\rightsquigarrow$ Tiefe.
Für $u, v \in V$ sei $\operatorname{lca}(u, v)$ die Ecke minimaler Tiefe auf dem eindeutigen $u - -v$-Weg in G. $\boxed{c_e \in \mathbb{N}_0 \forall e}$

Algorithmus 4.3.9 (Multicut + Integer multicommodity flow)
(In der Vorlesung: Algorithmus 4.3.8)

1. *Setze $f \leftarrow 0, D \leftarrow \emptyset$*
2. *Für alle Ecken v in einer Reihenfolge nicht-wachsender Tiefe.*
   Für alle Paare $\{s_i, t_i\}$ mit $v = \operatorname{lca}(s_i, t_i)$ in beliebiger Reihenfolge erhöhe den Flusswert ganzzahlig, soweit möglich.
   Füge zu D alle Kanten hinzu, die jeweils saturiert werden.
3. *Sei $e_1, e_2, \ldots, e_l$ die Reihenfolge in der die Kanten zu D hinzugefügt wurden.*
4. *Für $j = l, (l-1), (l-2), \ldots, 1$:{*
   Ist $D \setminus \{e_j\}$ ein Multicut, so setze
   $D \leftarrow D \setminus \{e_j\}$ }
5. *Gib f und D aus.*

Lemma 4.3.10
(In der Vorlesung: Lemma 4.3.9)
Sei $1 \leq i \leq k$ so, dass $f_i > 0$ ist. Sei $v = \mathrm{lca}(s_i, t_i$.
Die Menge D enthält höchstens eine Kante des $v - -s_i$-Weges und höchstens eine Kante des $v - -t_i$-Weges.

27.07.2004

$$
(P) \quad
\begin{aligned}
&\min \sum_e c_e d_e \\
&s.th. \sum_{e \in P_i} d_e \geq 1 \forall 1 \leq i \leq k \\
&d_e \in \{0,1\} \forall e \in E
\end{aligned}
$$

$$
(D) \quad
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{k} f_i \\
&s.th. \sim_{i: e \in P_i} f_i \leq c_e \forall e \in E \\
&f_i \in \mathbb{N}_0 \forall 1 \leq i \leq k
\end{aligned}
$$

Beweis Lemma 4.3.2
Ann: Sei $1 \leq i \leq k$ und seien $e, e' \in D$ auf dem $v - s_i$ Weg wobei $v = \mathrm{lca}(s_i, t_i)$.
Zu dem Zeitpunkt in 4., zu dem e betrachtet wird, existiert ein $1 \leq j \leq k (j \neq i)$, so dass e die einzige Kante von D auf P_j ist (*). Sei $u = \mathrm{lca}(s_j, t_j)$.
Nach dem Moment in Schritt 2., zu dem u betrachtet wurde, enthielt D eine Kante des $s_j - t_j$-Weges. Sei e'' eine solche Kante.
Da $f_i > 0$, wurde e zu D hinzugefügt nachdem in 2. v betrachtet wurde.
$\Rightarrow$ e wurde nach e'' zu D hinzugefügt.
$\Rightarrow$ zu dem Zeitpunkt in 4., zu dem e betrachtet wird, enthält D die Kante e'' aus P_j. Widerspruch zu (*) $\Rightarrow$ Beh.

Satz 4.3.11
(In der Vorlesung: Satz 4.3.10)
Der Algorithmus 4.3.9 erzeugt einen Multicut, dessen Wert höchstens doppelt so hoch ist wie der optimale Wert und einen IMF, dessen Wert mindestens halb so hoch ist, wie der optimale Wert.

Folgerung 4.3.1
(In der Vorlesung: Folgerung 4.3.11)
Für Bäume mit ganzzahligen Kantenkapazitäten gilt

$$\max_{F \text{ ist IMF}} |F| \leq \min_{C \text{ multicut}} c(C) \leq 2 \max_{F \text{ ist IMF}} |F|$$

wobei $|F| = \sum_{i=1}^{k} f_i$ Wert des Flusses.

Bemerkung 4.3.12
(In der Vorlesung: Bemerkung 4.3.12)
Für allgemeine Graphen kennt man $O(\log k)$ Approximationsalgorithmen für

das Minimum Multicut Problem aber keine Approximationsalgorithmen mit nicht trivialem Approximationsfaktor für das IMF Problem.

$$\frac{(D)}{(ILP-D} \sim O(k) \qquad \frac{(D)}{(ILP-D} = \frac{\frac{n}{2}}{1} \overset{n=k}{=} \frac{k}{2}$$

4.4 Survivable Network Design Problem (Jain 2001)

Sei $G = (V(G), E(G))$ ein Graph. Sei $M : E(G) \to \mathbb{N}$.
Für $S \subseteq V(G)$ sei $\delta(G)$ die Menge der Kanten, die S verlässt, d.h.

$$\delta(S) = \{e \in E(G) | \, |e \cap S| = 1\}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E(G)} c(e) x_e \\ \text{s.th.} \quad & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S) \forall S \subseteq V(G) \\ & x_e \leq u(e), x_e \geq 0 \forall e \in E(G) \end{aligned}$$

für $c : E(G) \to \mathbb{Q}^+$
und $f : 2^{V(G)} \to \mathbb{Z}^+$
$F : 2^{\mathcal{U}}$ heißt *schwach supermodular*: $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lll} \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{U} & \text{entweder} & f(\mathcal{A}) + f(\mathcal{B}) \leq f(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) + f(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \\ & \text{oder} & f(\mathcal{A}) + f(\mathcal{B}) \leq f(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) + f(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) \end{array}$$

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ heißt *laminar*: $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathcal{F}$ gilt
entweder $X \setminus Y = \emptyset$ oder $Y \setminus X = \emptyset$ oder $X \cap Y = \emptyset$. (kein XOR!)

$$\begin{aligned} S \subseteq V(G) \rightsquigarrow \delta(S) &\subseteq E(G) \\ \chi_S &\in \{0,1\}^{E(G)} \\ \chi_S^T x = \sum_{e \in \delta(S)} x_e &\overset{\text{„}S \text{ saturiert“}}{=} f(S) \end{aligned}$$

LEMMA 4.4.1 (JAIN 2001)
(In der Vorlesung: Lemma 4.4.1)
Sei $f : 2^{V(G)} \to \mathbb{Z}^+$ schwach supermodular.
Sei $(x_e)_{e \in E(G)}$ eine Ecke des Polyeders

$$\{x \in \mathbb{R}^{E(G)} | \chi_S^T x \geq f(S) \forall S \subseteq V(G), x \geq 0, x \leq u\}$$

so dass $0 < x_e < 1 \forall e \in E(G)$ gilt.
Dann existiert eine laminare Familie von m Mengen $\mathcal{B}$, die alle saturiert sind und für die Vektoren $\chi_S, S \in \mathcal{B}$ linear unabhängig sind.

BEWEIS LEMMA 4.4.1
Sei $\mathcal{B}$ eine laminare Menge saturierter Teilmengen von $V(G)$, so dass $\chi_S, S \in \mathcal{B}$ linear unabhängige Vektoren sind und $|\mathcal{B}|$ maximal ist.
Ann: $|\mathcal{B}| < m$.
Da x eine Ecke des Polyeders ist, erfüllt x m linear unabhängige Ungleichungen mit Gleichheit. Da $0 < x_e y < 1 \forall e \in E(G)$ gilt, existieren m saturierte Mengen S mit linear unabhängigen Vektoren χ_S.
$\Rightarrow \exists S \subseteq V(G), S$ saturiert, $S \notin \mathcal{B}$, so dass
$\{\chi_T | T \in \mathcal{B} \cup \{S\}\}$ linear unabhängig sind.
Sei S so gewählt, dass

$$\gamma(S) := |\{B \in \mathcal{B} | B \cap S\} neq \emptyset, B \setminus S \neq \emptyset, S \setminus B \neq \emptyset\}|$$

minimal ist.
$\Rightarrow \gamma(S) > 0$.
$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$, das S kreuzt.
Da F schwach supermodular ist, gilt entweder

$$\begin{aligned}
f(B \setminus S) &+ f(S \setminus B) \geq f(S) + f(B) = \sum_{e \in \delta(S)} x_e + \sum_{e \in \delta(B)} x_e \\
&= \sum_{e \in \delta(S \setminus B)} x_e + \sum_{e \in \delta(B \setminus S)} x_e + 2 \underbrace{\sum_{e \in E_G(S \cap B, V(G) \setminus (S \cup B))} x_e}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{e \in \delta(S \setminus B)} x_e + \sum_{e \in \delta(B \setminus S)} x_e \\
&\geq f(B \setminus S) + f(S \setminus B)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
f(S \cup B) &+ f(S \cap B) \geq f(S) + f(B) = \sum_{e \in \delta(S)} x_e + \sum_{e \in \delta(B)} x_e \\
&\geq \sum_{e \in \delta(S \cup B)} x_e + \sum_{e \in \delta(S \cap B)} x_e \\
&\geq f(S \cup B) + f(S \cap B)
\end{aligned}$$

Im ersten Fall sind $S \setminus B$, $B \setminus S$ saturiert und $\chi_{S \setminus B} + \chi_{B \setminus S} = \chi_B + \chi_S$.
Im zweiten Fall sind $S \sup B$, $S \cap B$ saturiert und $\chi_{S \cap B} + \chi_{S \cup B} = \chi_B + \chi_S$.

$$\Rightarrow \exists T \in \{S \setminus B, B \setminus S, S \cup B, S \cap B\} : \{\chi_{T'} | T' \in \mathcal{B} \cup \{T\}\}$$

linear unabhängig und T ist saturiert.
Weiter gilt $\gamma(T) = \gamma(S)$, denn B kreuzt S aber nicht T und es existiert kein $c \in \mathcal{B}$ das T kreuzt aber nicht S. Widerspruch $\Rightarrow$ Beh.

Index